

29

BIBLIOTECĂ DE SPECIALITATE DE ȘTIINȚE  
MATEMATICE ȘI FIZICĂ DIN R. P. R.

I. S. DUBNOV

# ERORI ÎN DEMONSTRAȚIILE GEOMETRICE

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

EDITURA TEHNICĂ





105-SM  
23-09/1963  
Jhu

I. S. DUBNOV

ERORI  
ÎN  
DEMONSTRAȚIILE  
GEOMETRICE

29

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE  
MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

BUCUREȘTI - 1958

## PREFAȚĂ LA PRIMA EDIȚIE

La baza acestei broșuri, stau lecțiile-discuții pe care le-am ținut de mai multe ori cu elevii din clasele VII-VIII, sau IX-X, în cercul de matematică pentru elevi de pe lângă Universitatea de Stat „M. V. Lomonosov” din Moscova. Atât pentru unii cât și pentru ceilalți s-au organizat de obicei două întâlniri, la un interval de aproximativ o lună. Primele ședințe au corespuns, în ce privește conținutul, cu capitolele I și III ale acestei broșuri, au avut un caracter de lecție și au cuprins, în afară de o introducere, expunerea fără comentarii a unor exemple de demonstrații eronate; la sfârșitul lecției, s-a propus auditorilor să explice esența erorilor comise și să fie pregătiți, la următoarea întâlnire, să-și expună obiecțiile. Cea de a doua întâlnire a fost, în cea mai mare parte, o discuție în amîndouă cazurile: lectorul a amintit pe scurt conținutul fiecărui exemplu și a invitat apoi să ia cuvîntul pe cei care doreau. Întotdeauna, s-au găsit mai mulți amatori, dar la tablă a ieșit unul, ales la întîmplare; ceilalți li s-a dat posibilitatea de a lua cuvîntul de la locul lor și uneori de a ieși și ei la tablă. Analiza fiecărui exemplu s-a terminat cu scurte intervenții ale lectorului, conținînd completări, variante și concluzii.

E greu de crezut că toți elevii care au luat parte activă la această muncă s-au pregătit singuri, fără a fi fost ajutați. Dar o expunere judicioasă a înfirmării unui sofism, chiar împrumutată, este departe de a fi întotdeauna o problemă simplă. Spre cînstea elevilor din Moscova care au frecventat cercul, trebuie să recunoaștem că ei s-au arătat aici într-o lumină foarte bună; unele expuneri au fost pur și simplu excelente.

Încurajat de această experiență, mă adresez acum unui public mai larg, în speranța că această broșură va trezi la cititori nu numai setea de a cunoaște, ci și o activitate matematică. Aceasta din urmă se poate manifesta în aceea că cetitorul va parcurge calea recomandată auditorilor lecțiilor mele: mai întîi, va studia exem-



înșeală, nici pe teoreme care, chiar dacă sînt adevărate, nu au fost încă demonstrate (deoarece acestea din urmă se pot baza, la rîndul lor, pe teorema de demonstrat, și atunci se obține un „cerc vicios“).

Se știe ce rol joacă figura în demonstrație: ea face să devină intuitiv nu numai conținutul teoremei, ci și mersul demonstrației. Uneori, pentru aceeași teoremă, sînt necesare cîteva figuri, deoarece demonstrația se modifică în funcție de poziția relativă a părților figurii (de exemplu: teorema privind unghiul înscris, pentru a cărei demonstrație se consideră, de obicei, trei cazuri: centrul cercului se află pe o latură a unghiului, în interiorul sau în afara lui). În aceste cazuri, este important să fie epuizate toate pozițiile posibile ale părților figurii; omiterea unei variante, pentru care raționamentele precedente nu pot fi repetate, face, bineînțeles, ca întreaga demonstrație să-și piardă valabilitatea, deoarece tocmai pentru această variantă teorema s-ar putea dovedi falsă.

Nu trebuie nici să exagerăm și nici să minimalizăm rolul figurii. Ar fi o exagerare să considerăm figura ca o parte componentă necesară a demonstrației. Din punct de vedere teoretic, orice demonstrație geometrică se poate efectua fără a folosi vreo figură și aceasta ar prezenta chiar avantajul de a îndepărta referirile la „evidență“, care uneori este aparentă și constituie o sursă de greșeli. Dar, din punct de vedere practic, renunțarea la figură ar duce la aceleași dificultăți ca acelea pe care le-am întîmpina dacă am vrea, de exemplu, să efectuăm întotdeauna „în minte“ operațiile cu numere cu mai multe cifre (sau pentru a lua un exemplu dintr-un domeniu mai îndepărtat, să jucăm șah „fără să privim tabla“); pericolul de a greși ar crește mult în acest caz. Vorbind despre ajutorul pe care figura îl dă demonstrației, am în vedere, desigur, o figură bună, executată cu destulă grijă. Elevul crede uneori că, dînd atenție figurii, el face numai o concesie exigențelor profesorului. În realitate, însă, lucrînd cu o figură incorectă, elevul se pedepsește în primul rînd pe sine pentru că, în loc de ajutor, el își creează uneori o piedică. Și acest elev să nu-și facă iluzii dacă, într-un caz sau altul, a reușit să facă demonstrația pe o figură incorectă: nu va fi așa întotdeauna. În această broșură, cititorul va întîlni, alături de figuri corecte, și altele întrucîtva deformate, dar cu bună știință. Atenția noastră se va concentra tocmai asupra demonstrațiilor eronate, iar pentru ele vor fi necesare uneori figuri inexacte (tot așa cum în demonstrațiile „prin reducere la absurd“ se recurge la figuri deformate în mod intenționat).



În cele ce urmează, în capitolele I și III dăm o serie de exemple de demonstrații geometrice eronate. Despre tipurile de erori, preferăm să vorbim mai târziu, când vom avea la dispoziție aceste exemple. Dar trebuie să prevenim de pe acum pe cititor în ce privește caracterul propozițiilor demonstrate (greșit).

Printre aceste propoziții, se întâlnesc unele a căror falsitate este imediat evidentă cetitorului, de exemplu „un unghi drept este egal cu un unghi obtuz“. În aceste cazuri problema constă în a descoperi eroarea în demonstrație. Asemenea demonstrații ale unor afirmații vădit incorecte, se cunosc încă din antichitate, sub denumirea de „sofisme“.

În alte exemple, cetitorul nu va ști dinainte dacă afirmația de demonstrat este adevărată sau falsă, dacă nu a întâlnit-o cumva înainte. Aici problema noastră se complică: trebuie să verificăm atât inconsistența demonstrației, cât și caracterul eronat al afirmației<sup>1)</sup>.

În sfârșit, se vor da exemple de demonstrații a căror eroare își are originea în faptul că proprietatea de demonstrat nu poate fi dovedită în nici un fel cu mijloacele de care dispune cel care demonstrează. Voi încerca să explic cum se poate întâmpla aceasta, cu ajutorul unui exemplu care nu are legătură cu geometria și nici cu știința.

Se cunoaște problema distractivă: „Un vapor să găsește la  $42^{\circ}15'$  latitudine nordică și  $17^{\circ}32'$  longitudine vestică (numerele sînt luate la întîmplare; de obicei se mai adaugă o serie de date care complică ipoteza). Cîți ani are căpitanul?“ Pentru scopul nostru, vom modifica întrucîtva întrebarea din problemă: „Este adevărată afirmația că vîrsta căpitanului este de peste 45 de ani?“. Oricui îi este clar că nu putem trage această concluzie din datele conținute în ipoteza problemei propuse și că orice încercare de a demonstra afirmația formulată cu privire la vîrsta căpitanului este condamnată la eșec. Mai mult, se poate arăta că demonstrația acestei afirmații este imposibilă. În adevăr, Direcția societății de navigație (despre care nu știm nimic din ipoteza problemei) poate să compună un itinerariu trecînd prin punctul geografic dat și să numească un căpitan de orice vîrstă (presupunînd că Direcția dispune pentru asemenea curse atît de căpitani tineri, cît și bătrîni).

Cu alte cuvinte, se poate presupune că vîrsta căpitanului este

<sup>1)</sup> Nu este suficient să facem numai primul lucru: deoarece și o afirmație adevărată poate fi justificată cu argumente false (de exemplu, din egalitatea falsă  $3 + 5 = 12$ , se poate trage concluzia corectă:  $3 + 5$  este un număr par).



mai mică de 45 de ani și, desigur, aceasta nu va duce la nici o contradicție cu datele privind latitudinea și longitudinea. Altfel ar sta lucrurile, dacă ipoteza problemei ar mai conține și alte date, de exemplu numele vaporului și data exactă a trecerii lui prin punctul considerat; atunci am putea considera că jurnalul de bord ne va permite să stabilim identitatea căpitanului, iar apoi și vârsta lui.

Așadar, există afirmații a căror valabilitate poate sau nu poate fi demonstrată, în funcție de mijloacele de care dispunem pentru demonstrație.

Revenind la obiectul nostru, punem întrebarea: este adevărat că suma unghiurilor oricărui triunghi este egală cu  $2d$ ? Orice elev care a studiat capitolul „Drepte paralele” cunoaște demonstrația acestei importante teoreme, dar puțini cunosc istoria ei de 2000 de ani. Demonstrația se bazează pe proprietățile unghiurilor formate de drepte paralele tăiate de o secantă, iar aceste proprietăți, la rândul lor, se bazează pe așa numita „axiomă a paralelelor”: printr-un punct, situat în afara unei drepte, se poate duce la această dreaptă o dreaptă paralelă cu ea și *numai una*<sup>1)</sup>. Din vremea lui Euclid, timp de mai bine de două milenii, s-au făcut încercări să se transforme această axiomă în teoremă, adică să se demonstreze afirmația, numai pe baza afirmațiilor care, la Euclid și în manualele noastre de școală, preced axioma paralelelor. Prin aceasta, s-a interzis să se introducă în locul acestei axiome o alta, oricât de evident ar părea conținutul ei. Toate aceste încercări au fost infructuoase și au arătat numai că axioma paralelelor, dată mai sus, se poate înlocui în multe moduri prin alte axiome. În particular, dacă luăm ca axiomă una dintre proprietățile unghiurilor formate de două drepte paralele și de o secantă, sau teorema cu privire la suma unghiurilor unui triunghi, axioma paralelelor devine o teoremă. Și abia după 1820, marele nostru compatriot, matematicianul Nicolai Ivanovici Lobacevski (1792—1856) din Kazan, a reușit să descopere izvorul insuccesului tuturor încercărilor de a demonstra axioma paralelelor. El a construit o teorie cuprinzătoare și profundă despre care nu încerc aici să dau nici măcar o idee vagă. În această teorie, este conținută, printre altele, în formă implicită, demonstrația imposibilității de a demonstra axioma paralelelor așa cum au încercat să o facă mulți savanți pînă la Lobacevski (și în timpul

<sup>1)</sup> Atragem atenția asupra faptului, că natura axiomatică a acestei propoziții este dată de cuvîntul „numai”: că se poate întotdeauna duce o paralelă, se demonstrează înainte, de exemplu pe baza teoremei „două perpendiculare pe o aceeași dreaptă sînt paralele”.



vietii lui). Oricît ar fi de complicată teoria lui Lobacevski și, pe de altă parte, oricît ar fi de naivă problema privind vîrsta căpitanului, în ambele cazuri „demonstrația imposibilității demonstrației” este de aceeași natură: pe exemple („modele”) concrete se constată că, din două judecări contradictorii, atît una cît și cealaltă poate fi compatibilă cu aceleași date inițiale. În cazul axiomei noastre, aceasta înseamnă: din ceea ce, în cursul obișnuit de geometrie, precede axioma paralelelor, nu rezultă nici valabilitatea, nici falsitatea afirmației conținute în această axiomă.

Știm acum că orice demonstrație a axiomei paralelelor, sau a oricărei afirmații echivalente cu ea, este greșită, dacă se bazează numai pe propozițiile care preced această axiomă. Dăm în cele ce urmează mai multe exemple simple ale unor astfel de demonstrații greșite.

## CAPITOLUL I

## ERORI DE RAȚIONAMENT, ACCESIBILE ÎNCEPĂTORULUI

Trecem la expunerea unor exemple de demonstrații greșite, reamintind că analiza lor critică se face în cap. II. Cititorul a mai fost prevenit că figurile din această carte sînt executate cu unele deformări care, adesea, nu pot fi observate imediat.

**Exemplul 1.** *Pătratul de latură 21 (cm) are aceeași arie ca și dreptunghiul de laturi 34 (cm) și 13 (cm).*

Pătratul  $Q$  se împarte în două dreptunghiuri, de dimensiuni  $13 \times 21$  și  $8 \times 21$  (fig. 1; de aci înainte vom omite să mai scriem „cm”); primul dreptunghi este împărțit în două trapeze

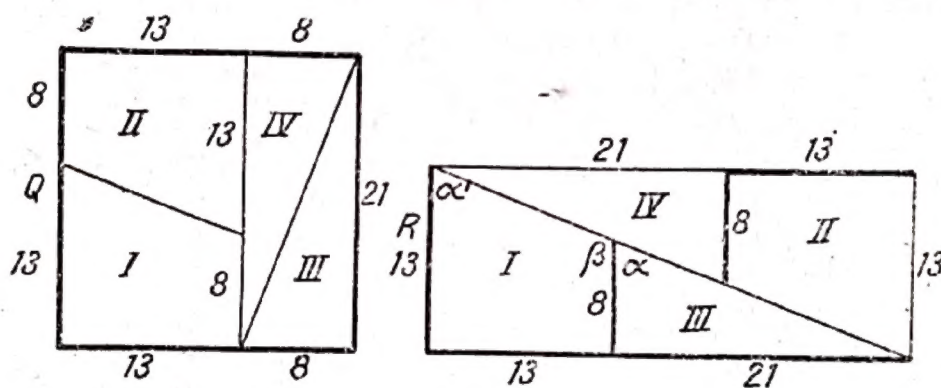


Fig. 1

dreptunghice egale, cu bazele 13 și 8, iar al doilea dreptunghi, în două triunghiuri dreptunghice egale, cu catetele 8 și 21. Din cele patru părți obținute, putem compune dreptunghiul  $R$ , așa cum se arată în fig. 1, dreapta (părțile corespunzătoare ale pătratului și ale dreptunghiului sînt notate cu aceleași cifre romane).



Mai exact, la trapezul dreptunghic  $I$ , alăturăm triunghiul dreptunghi  $III$ , astfel ca unghiurile drepte alăturate laturii comune  $8$  să fie adiacente; se formează un triunghi dreptunghic, cu catetele  $13$  și  $13 + 21 = 34$ . Compunem un triunghi egal cu primul din părțile  $II$  și  $IV$ ; în sfârșit, din cele două triunghiuri dreptunghice egale obținute formăm dreptunghiul  $R$ , cu laturile  $13$  și  $34$ . Aria acestui dreptunghi este egală cu  $34 \times 13 = 442$  ( $\text{cm}^2$ ), în timp ce aria pătratului  $Q$ , constând din aceleași părți, este  $21 \times 21 = 441$  ( $\text{cm}^2$ ). De unde a apărut un centimetru pătrat în plus? Recomandăm cititorului să facă o experiență: să decupeze din hîrtie (de preferință, dintr-una cu pătrățele, luînd, de exemplu, lungimea unui pătrățel drept un centimetru) pătratul  $Q$ , să-l taie în patru părți, respectînd exact dimensiunile indicate, și să compună din aceste părți dreptunghiul  $R$ .

### Exemplul 2. O demonstrație a axiomei paralelelor

Fie dreapta  $AB$  și un punct  $C$  în afara ei; să se demonstreze că prin punctul  $C$  se poate duce o singură dreaptă paralelă cu  $AB$ . Vom recurge la construcția cunoscută: din punctul  $C$ , cobo-

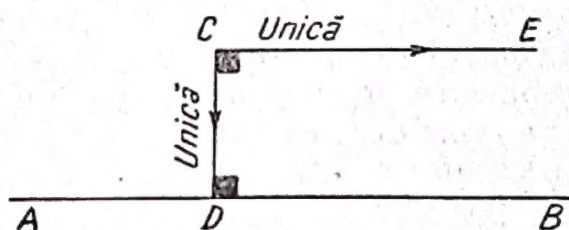


Fig. 2

rîm perpendiculara  $CD$  pe dreapta  $AB$  (fig. 2; aici și adesea în cele ce urmează, unghiurile drepte se înseamnă în figuri prin pătrățele negre); pe această perpendiculară ridicăm, în punctul  $C$ , perpendiculara  $CE$ . Aceasta va fi paralelă cu dreapta  $AB$ , în virtutea cunoscutei teoreme cu privire la două perpendiculare pe o aceeași dreaptă (să observăm că avem dreptul să ne referim aici la această teoremă, deoarece ea se demonstrează înainte de axioma paralelelor). Însă, dintr-un punct pe o dreaptă se poate coborî o singură perpendiculară, iar dintr-un punct situat pe o dreaptă se poate ridica, de asemenea, o singură perpendiculară pe această dreaptă (și una și alta se demonstrează înaintea axiomei paralelelor); deci, dreapta paralelă  $CE$  obținută este unică.



$= 2d$ ; deci,  $\alpha + 2d \leq 2\alpha$ ,  $\alpha \geq 2d$ . Deoarece însă  $\alpha$  nu poate fi mai mare decât  $2d$ ,  $\alpha = 2d$ , adică suma unghiurilor unui triunghi  $ABC$  este egală cu  $2d$ .

**Exemplul 6.** *Toate triunghiurile sînt isoscele.*

Fie  $ABC$  un triunghi oarecare (fig. 5 sau 6 sau 7); să ducem bisectoarea unghiului  $C$ , apoi axa de simetrie a laturii  $AB$  (adică dreapta perpendiculară pe  $AB$ , în mijlocul  $M$  al segmentului  $AB$ ) și să considerăm diferitele cazuri de poziție relativă a acestor drepte; deoarece considerăm numai o singură bisectoare și o singură axă de simetrie, ne vom permite să le numim, pur și simplu, „bisectoarea” și „axa”.

**C a z u l 1:** *bisectoarea și axa nu se intersectează*, adică sînt sau paralele, sau se confundă. Deoarece axa este perpendiculară

pe  $AB$ , urmează că și bisectoarea este perpendiculară pe  $AB$ , adică coincide cu înălțimea și, în acest caz, triunghiul  $ABC$  este isoscel ( $CA = CB$ ).

**C a z u l 2:** *bisectoarea și axa se taie în interiorul triunghiului  $ABC$*  (fig. 5), fie în punctul  $N$ . Deoarece acest punct este egal depărtat de laturile unghiului  $ACB$ , coborînd din el perpendicularele  $NP$  și  $NQ$ , respectiv, pe  $CB$

și  $CA$ , avem  $NP = NQ$ . Dar punctul  $N$  este, în același timp, egal depărtat de extremitățile segmentului  $AB$ , adică  $NB = NA$ . Triunghiurile dreptunghice  $NPB$  și  $NQA$  au o catetă și ipotenuza egale, deci  $\angle NAQ = \angle NBP$ . Adăugînd la aceste două unghiuri egale unghiurile  $NAB$  și  $NBA$ , egale între ele (ca unghiuri la bază ale triunghiului isoscel  $ANB$ ), obținem  $\angle CAB = \angle CBA$ , deci triunghiul  $ABC$  este isoscel (anume  $CA = CB$ ).

**C a z u l 3:** *bisectoarea și axa se taie pe dreapta  $AB$* , adică în mijlocul  $M$  al acestei laturi. Aceasta înseamnă că, în triunghiul  $ABC$ , mediana și bisectoarea duse din vîrfurile  $C$  coincid și, de aici, rezultă că acest triunghi este isoscel.

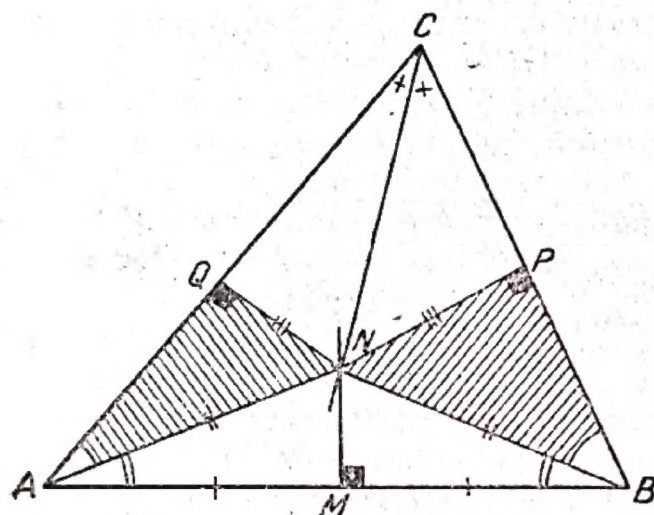


Fig. 5



**O b s e r v a Ț i e .** Prevenim pe cititor împotriva unei erori posibile. Este bine cunoscut că, pentru un triunghi isoscel, mediana și bisectoarea coincid. Dar noi nu ne referim aici la această afirmație, ci la cea reciprocă:

„dacă într-un triunghi mediana și bisectoarea pornind dintr-un același vîrf coincid, triunghiul este isoscel“. În această formulare, teorema reciprocă este de asemenea adevărată, dar demonstrația ei poate prezenta dificultăți pentru cititor; de aceea, dăm una dintre cele posibile. Să presupunem că în triunghiul  $ABC$  segmentul  $CM$  este în același timp mediană și bisectoare. Dacă se coboară din punctul  $M$  perpendicularele  $MP$  și  $MQ$  pe laturile  $CB$  și  $CA$  (se poate folosi fig. 5, considerînd punctele  $M$  și  $N$  confundate; dreapta  $MN$  devine inutilă, în acest caz), obținem triunghiurile dreptunghice egale  $MPB$  și  $MQA$ , iar apoi, din egalitatea unghiurilor  $MBP$  și  $MAQ$ , tragem concluzia că triunghiul  $ABC$  este isoscel. Acest raționament va fi incomplet, dacă nu vom arăta că punctele  $P$  și  $Q$  cad pe laturile  $CB$  și  $CA$ , și nu pe prelungirile lor. Unul dintre aceste puncte ar putea cădea pe prelungirea laturii respective, dacă unul dintre unghiurile  $A$  sau  $B$  ar fi obtuz. Fie, de exemplu, unghiul  $B$  obtuz, astfel încît punctul  $P$  se află pe prelungirea laturii  $CB$ ; ca și înainte, obținem  $\angle MAQ = \angle MBP$ , dar acum aceasta duce la o contradicție deoarece primul dintre aceste unghiuri este interior triunghiului  $ABC$ , iar al doilea exterior, neadiacent cu primul.

**C a z u l 4 a:** bisectoarea și axa se taie în afara triunghiului  $ABC$ ; perpendicularele coborîte din punctul de intersecție  $N$  pe laturile  $CB$  și  $CA$  cad pe aceste laturi (fig. 6) și nu pe prelungirile lor. Ca și înainte, obținem triunghiurile egale  $NPB$  și  $NQA$  și triunghiul isoscel  $NAB$ . Unghiurile la baza  $AB$  ale triunghiului  $ABC$  sînt acum egale ca diferențe (și nu ca sume, ca în cazul 2) ale unor unghiuri respectiv egale.

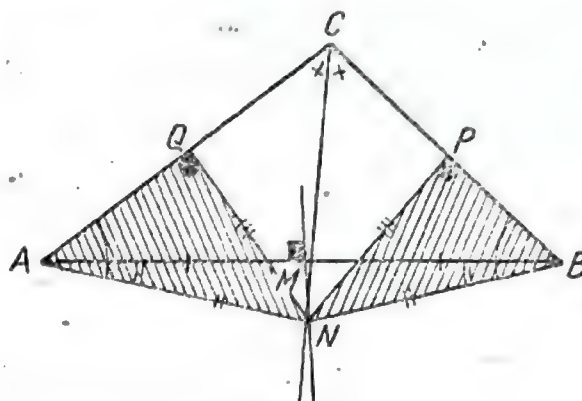


Fig. 6

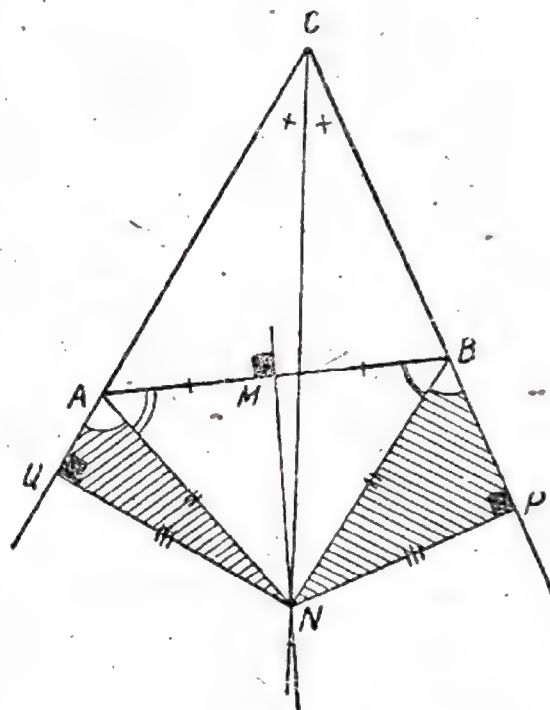


Fig. 7



**C a z u l 4 b:** bisectoarea și axa se taie în afara triunghiului  $ABC$ ; perpendicularele coborâte din punctul de intersecție  $N$  pe laturile  $CB$  și  $CA$  cad pe prelungirile acestor laturi (fig. 7). Aceleași construcții și raționamente duc la concluzia egalității unghiurilor exterioare din vîrfurile  $A$  și  $B$  ale triunghiului  $ABC$ . De aici rezultă imediat egalitatea unghiurilor interioare  $A$  și  $B$ , și deci  $CA = CB$ .

**Exemplul 7.** Un unghi drept este egal cu unul obtuz.

Din extremitățile segmentului  $AB$  (fig. 8 sau 9), să ducem două segmente egale între ele  $AC$  și  $BD$ , situate de aceeași parte a dreptei  $AB$  și formînd cu ea unghiul drept  $DBA$  și unghiul obtuz  $CAB$ ; vom demonstra egalitatea acestor unghiuri.

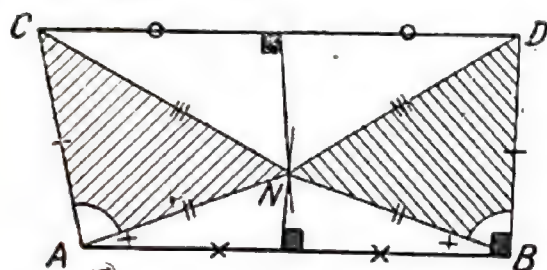


Fig. 8

Unind  $C$  cu  $D$  obținem un patrulater  $ABDC$ , ale cărui laturi  $AC$ ,  $BD$  evident nu sînt paralele, la fel ca și laturile  $AB$ ,  $CD$  (în caz contrar,  $ABDC$  ar fi un trapez isoscel cu unghiuri inegale la baza  $AB$ ). Pentru fiecare dintre segmentele  $AB$ ,  $CD$

construim axa de simetrie. Deoarece segmentele nu sînt paralele, nici axele perpendiculare pe ele nu sînt paralele și nici nu se confundă, ci se intersectează, de exemplu, în punctul  $N$ . Să examinăm cazurile posibile.

**C a z u l 1 :** punctul  $N$  se află „deasupra” dreptei  $AB$ , mai exact, de aceeași parte a dreptei  $AB$ , cu patrulaterul  $ABDC$  (v. fig. 8, unde punctul  $N$  se află în interiorul patrulaterului). Să unim acest punct cu toate vîrfurile patrulaterului; deoarece el este egal depărtat de extremitățile segmentului  $AB$  și de extremitățile segmentului  $CD$ , triunghiurile  $NAC$  și  $NBD$  sînt egale, ca avînd trei laturi respectiv egale. De unde rezultă că  $\sphericalangle NAC = \sphericalangle NBD$ . Dacă la primul unghi adunăm unghiul  $NAB$ , iar la al doilea, unghiul  $NBA$  și ținem seama de faptul că  $\sphericalangle NAB = \sphericalangle NBA$ , conform proprietății triunghiului isoscel, ajungem la egalitatea  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$ .

**C a z u l 2:** punctul  $N$  se află pe  $AB$ , adică este mijlocul segmentului  $AB$ . Demonstrația precedentă se simplifică — egalitatea  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$  se obține din egalitatea triunghiurilor  $NAC$  și  $NBD$ .

**C a z u l 3 :** punctul  $N$  se află „sub”  $AB$ , adică nu este situat de aceeași parte a dreptei  $AB$ , cu patrulaterul  $ABDC$  (fig. 9).



Tot din egalitatea triunghiurilor, se obține  $\sphericalangle NAC = \sphericalangle NBD$ , dar acum din aceste unghiuri trebuie scăzute unghiurile  $NAB$  și  $NBA$ , egale între ele, după care se obține de asemenea

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA.$$

**Exemplul 8.** Dacă între elementele a două triunghiuri s-a stabilit o

corespondență, astfel încât două laturi și unghiul opus uneia dintre ele, într-un triunghi, sînt egale cu elementele respective ale celuilalt triunghi, triunghiurile sînt egale. Mai concis: două triunghiuri sînt egale dacă au două laturi respectiv egale și unul dintre unghiurile opuse acestor laturi egal.

Să presupunem că despre triunghiurile  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$  (fig. 10, 11 sau 12) se știe că:  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$ ; să demonstrăm egalitatea lor. În acest scop, vom folosi o metodă cunoscută din demonstrația obișnuită a egalității triunghiurilor, în cazul egalității tuturor laturilor: Să alipim triunghiul  $A_1B_1C_1$  la triunghiul  $ABC$ , astfel încât extremitățile laturilor egale (anume cele opuse unghiurilor egale prin ipoteză)  $AB$  și  $A_1B_1$  să coincidă ( $A$  cu  $A_1$  și  $B$  cu  $B_1$ ); atunci triunghiul  $A_1B_1C_1$  (răsturnat) va ocupa poziția  $ABC_2$ . Unind punctele  $C$  și  $C_2$ , să considerăm cele trei cazuri posibile.

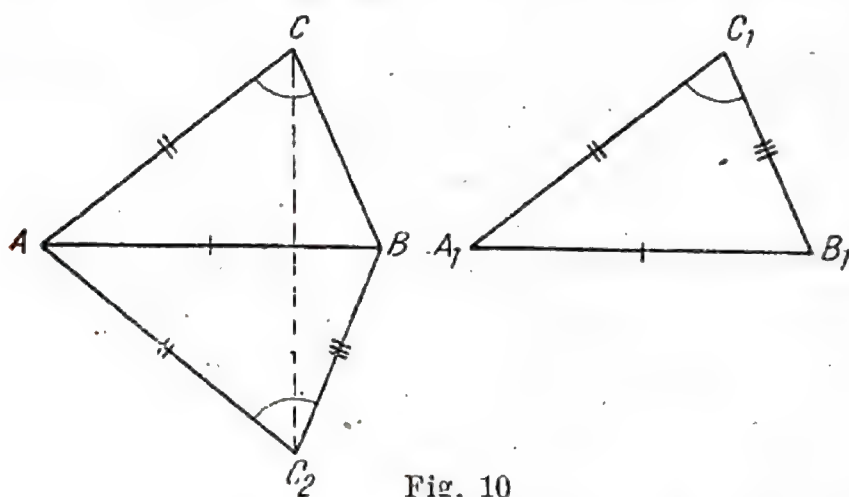


Fig. 10

**Cazul 1:** dreapta  $CC_2$  intersectează latura  $AB$  într-un punct interior (fig. 10). Triunghiul  $ACC_2$  este isoscel, deci



$\angle ACC_2 = \angle AC_2C$ ; scăzând aceste unghiuri egale respectiv din unghiurile  $ACB$  și  $AC_2B$ , egale prin ipoteză, obținem:  $\angle BCC_2 = \angle BC_2C$ . Ultima egalitate ne arată că triunghiul  $CBC_2$  este de asemenea isoscel, anume  $CB = C_2B$ , deci  $CB = C_1B_1$  și triunghiurile  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$  sînt egale, ca avînd toate laturile respectiv egale.

**C a z u l 2:** dreapta  $CC_2$  intersectează prelungirea laturii  $AB$  dincolo de punctul  $B$  (fig. 11). Raționamentul rămîne cel precedent,

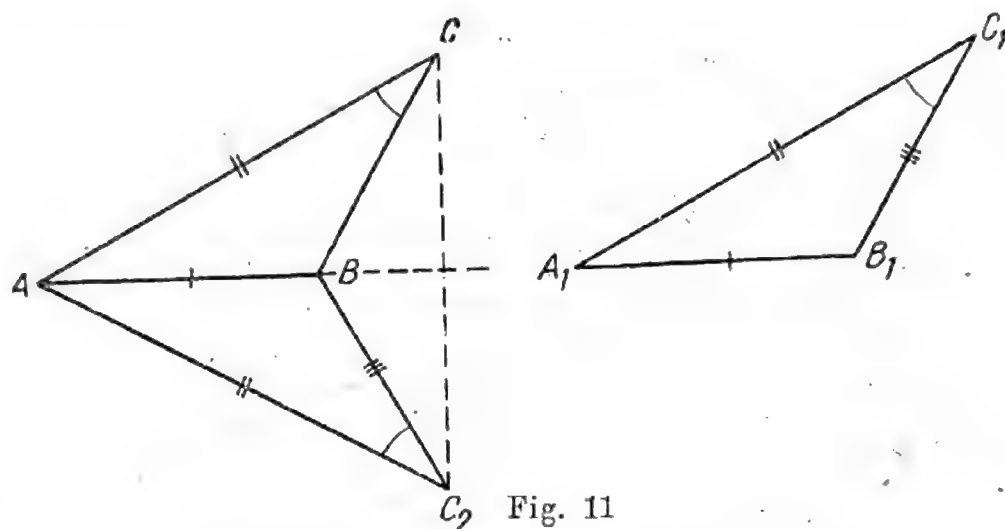


Fig. 11

se schimbă doar ordinea de scădere: din unghiurile egale  $ACC_2$  și  $AC_2C$ , se scad unghiurile egale  $ACB$  și  $AC_2B$ .

**C a z u l 3:** dreapta  $CC_2$  taie prelungirea laturii  $AB$  dincolo de punctul  $A$  (fig. 12). Raționamentul este același ca în cazul 1, cu

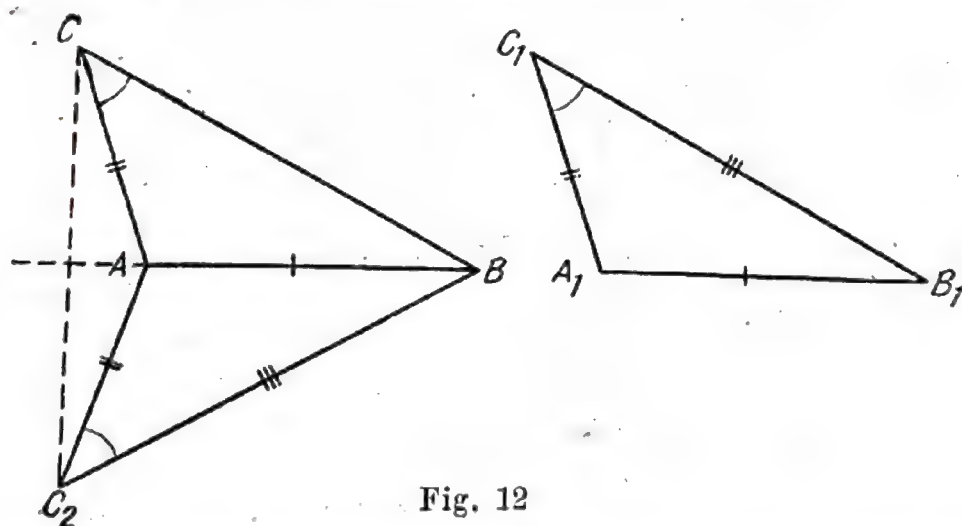


Fig. 12

singura deosebire că scăderea se înlocuiește prin adunare: la unghiurile egale  $ACC_2$  și  $AC_2C$ , se adaugă unghiurile egale  $ACB$  și  $AC_2B$ .



**Exemplul 9:** Orice dreptunghi înscris într-un pătrat este tot un pătrat<sup>1)</sup>.

Mai exact: dacă dreptunghiul  $MNPQ$  (fig. 13) este înscris în pătratul  $ABCD$ , astfel încît pe fiecare latură să se afle un vîrf al dreptunghiului (în cazul nostru,  $M$  pe  $AB$ ,  $N$  pe  $BC$ ,  $P$  pe  $CD$ ,  $Q$  pe  $DA$ ), acesta din urmă este de asemenea un pătrat. Pentru demonstrație, să coborîm perpendicularele  $PR$  și  $QS$  din  $P$  și  $Q$  respectiv pe  $AB$  și  $BC$ . Aceste perpendiculare sînt egale între ele (sînt egale cu latura pătratului  $ABCD$ ). Ele sînt catete în triunghiurile  $PRM$  și  $QSN$ , în care ipotenuzele sînt de asemenea egale între ele ca diagonale ale dreptunghiului  $MNPQ$ ; de unde rezultă egalitatea triunghiurilor (hașurate în figură) și apoi și egalitatea unghiurilor:

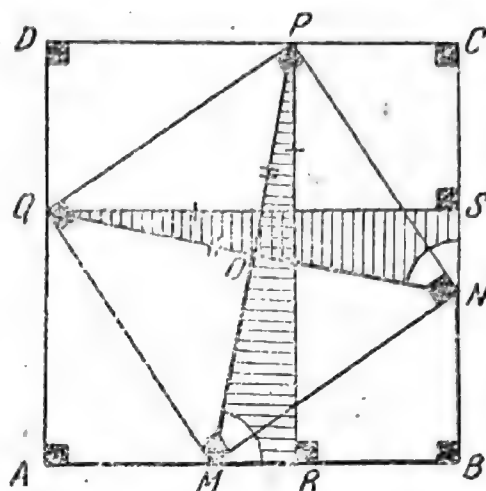


Fig. 13

$$\sphericalangle PMR = \sphericalangle QNS.$$

Să considerăm acum patrulaterul  $MBNO$  (în figură este trasat cu linii groase;  $O$  este punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului  $MNPQ$ ); unghiul lui exterior la vîrf  $N$  este egal cu cel interior la vîrf  $M$ , deci suma unghiurilor interioare la vîrfurile  $M$  și  $N$  este  $2d$ . Aceeași trebuie să fie suma unghiurilor interioare la vîrfurile  $B$  și  $O$ , dar unul dintre ele ( $\sphericalangle B$ ) este drept, deci și unghiul  $O$  este drept, adică diagonalele dreptunghiului sînt perpendiculare; deoarece aceasta este proprietatea care caracterizează, printre dreptunghiuri, pătratul, demonstrația este terminată.

**Exemplul 10.** O perpendiculară și o oblică la aceeași dreaptă nu se intersectează. Aceasta este o variantă a unui sofism antic, care a ajuns la noi mulțumită matematicianului grec Proclus (sec. V. e. n.<sup>2)</sup>). Să precizăm în ce constă afirmația noastră:

<sup>1)</sup> Sperăm că niciunul dintre cititori nu va vedea o contradicție în alăturarea cuvintelor „dreptunghi... este... pătrat”. Desigur, nu toate dreptunghiurile sînt pătrate, dar unele dintre ele sînt.

<sup>2)</sup> Pentru expunerea acestui sofism la Proclus, vezi Bonola, Geometria neeuclidiană, SPB, 1905, p. 5, trad. rusă.



în punctele  $A$  și  $B$  ale dreptei  $AB$  (fig. 14), se construiesc, de aceeași parte a ei, două raze (spre a sublinia că sînt raze, în figură s-a marcat sensul lor prin săgeți):  $AQ$  face un unghi ascuțit

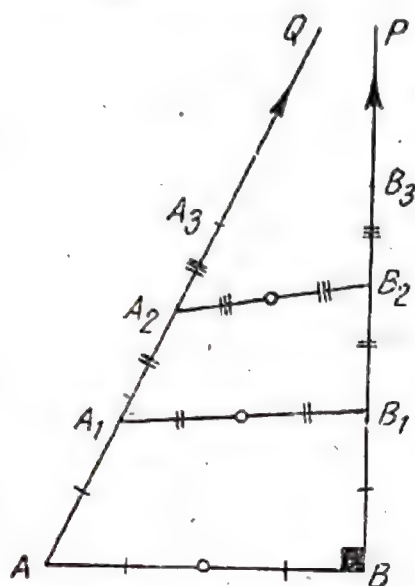


Fig. 14

$BAQ$  cu dreapta  $AB$ , iar  $BP$  este perpendiculară pe  $AB$ ; vom demonstra că aceste raze nu se intersectează.

Să împărțim segmentul  $AB$  în două și să așternem pe fiecare dintre razele  $AQ$ ,  $BP$ , lungimea  $\frac{1}{2} AB$ ; așa

dar,  $AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2} AB$ . Intersecția

perpendiculararei cu oblica nu poate avea loc pe segmentele  $AA_1$  și  $BB_1$ , adică segmentele  $AA_1$  și  $BB_1$  nu pot avea un punct comun. Într-adevăr dacă ar exista un astfel de punct comun ( $K$ ), s-ar obține un triunghi ( $AKB$ ), în care suma a două laturi ( $AK + KB$ ) este mai mică decât a treia latură ( $AB$ ) sau este egală cu ea, ceea ce este imposibil.

Unind punctele  $A_1$  și  $B_1$ , repetăm construcția precedentă: de la punctele  $A_1$  și  $B_1$ , să așternem pe fiecare dintre razele  $AQ$  și  $BP$ , în același sens, mărimea  $\frac{1}{2} A_1B_1$ ; vom avea  $A_1A_2 = B_1B_2 =$

$= \frac{1}{2} A_1B_1$ . Din considerațiile expuse mai sus, rezultă că segmentele

$A_1A_2$  și  $B_1B_2$  nu pot avea un punct comun și, în particular,  $A_2$  nu poate coincide cu  $B_2$ . În acest caz, împărțim segmentul  $A_2B_2$  în două, așternem  $A_2A_3 = B_2B_3 = \frac{1}{2} A_2B_2$  etc. (trebuie să sub-

liniem în mod deosebit că așternerea segmentelor egale  $A_nA_{n+1} =$

$= B_nB_{n+1} = \frac{1}{2} A_nB_n$  pe o rază și pe alta se face, de fiecare dată, în sensul razei, deci nu întâlnește nici o piedică. Procesul se prelungește indefinit; el ar putea să se întrerupă, dacă ar dispărea segmentul  $A_nB_n$ , adică dacă ar coincide punctele  $A_n$  și  $B_n$ , de același indice, dar, după cum am văzut, acest lucru este imposibil (de altfel imposibilitatea acestei coincidențe este clară direct din faptul că s-ar obține atunci un triunghi dreptunghic la care ipotenuza  $AA_n$  ar fi egală cu cateta  $BB_n$ ). Deci, la fiecare pas al acestui proces infinit, intersecția perpendiculararei cu oblica nu are loc, așadar ea nu are loc niciodată.



Am trecut în revistă o serie de raționamente care, uneori, par nu mai puțin convingătoare decât demonstrațiile dintr-un manual de geometrie. În unele cazuri, aceste raționamente au drept scop demonstrarea unor absurdități evidente; în alte cazuri, neadevărul celor demonstrate nu apare dintr-o dată, dar la fiecare exemplu cititorul a fost prevenit că se comite o eroare. A venit momentul să dăm la iveală aceste erori.

Înainte de a ne ocupa (în cap. II) de analiza tuturor exemplor date până acum, invit în mod insistent pe cititori să încerce a găsi eroarea din fiecare caz prin propriile lor forțe. Poate că aceasta nu va reuși, nici totdeauna, nici tuturor și nici în mod complet; dar chiar în cazul insuccesului, analiza aprofundată a unui exemplu oarecare pregătește un teren bun pentru citirea celor ce se spun despre acest exemplu în cap. II. Iar în caz de succes, probabil că cititorul va dori să compare interpretarea sa cu cele expuse în cap. II. Propunând această muncă, în care majoritatea cititorilor nu au experiență, consider util să dau unele indicații și sfaturi preliminare.

1. A infirmă o demonstrație geometrică incorectă înseamnă a-i găsi o eroare logică. Dificultatea constă în aceea că o astfel de demonstrație este corectă aproape peste tot, dar conține în mod obligatoriu undeva o lacună — și pe aceasta urmează s-o descoperim.

2. Criticînd o demonstrație, se indică adesea că ea a fost făcută „pe o figură greșită”. Aceasta nu este o formulare prea fericită; în nici un caz, nu trebuie să ne mărginim la ea. Atunci cînd spunem că figura *A* este falsă și trebuie înlocuită prin figura *B*, aceasta exprimă de obicei următoarea stare de lucruri: demonstrația nu ia în considerare toate cazurile posibile (și aceasta este o greșeală logică!); se iau în considerare și se reprezintă în fig. *A* tocmai cazurile care se dovedesc ulterior în contradicție cu ipoteza teoremei și se omit cele (fig. *B*) compatibile cu această ipoteză. Așadar, sursa erorii nu stă în figură, ci în enumerarea incompletă a cazurilor posibile.

3. Dacă în fig. *A* este reprezentat un caz care duce la o concluzie absurdă, este suficient să arătăm că în fig. *B* nu ajungem la această concluzie, pentru a socoti demonstrată indirect („prin reducere la absurd”) imposibilitatea cazului *A*. În asemenea împrejurări, este de dorit (dar nu obligatoriu!) să obținem și o demonstrație directă a faptului că ipoteza teoremei duce cu necesitate la cazul *B* (în cap. II, se dau modele de astfel de demonstrații).

4. Deși figura în sine nu poate să dovedească nici justetea unei afirmații și nici falsitatea ei, trebuie totuși să recomandăm



ca figurile să fie executate cit se poate de exact (cu instrumente). Acolo unde avem de-a face cu un sofism evident, este util să facem figura astfel, încât ea să sublinieze net absurditatea concluziei; astfel, în exemplul 7, să reprezentăm unghiul obtuz apropiat de  $180^\circ$ ; în exemplul 10, să figurăm perpendiculara și oblica intersectându-se în limitele figurii etc. O astfel de figură ne poate sugera în ce direcție să căutăm eroarea.

5. În unele cazuri, eroarea nu are nimic comun cu figura, ci constă, de exemplu, în următoarele: se demonstrează (corect) nu afirmația pe care am început s-o demonstrăm, ci una înrudită, iar cel care demonstrează nu observă substituția făcută, sau consideră că ea nu va fi observată de alții.

6. Când nu știm dacă afirmația de demonstrat este adevărată, este mai bine (dar nu obligatoriu) să începem cu clarificarea acestei chestiuni. Trebuie să avem în vedere că o afirmație este infirmată, dacă se construiește măcar un singur exemplu care o contrazice.

Sensul indicațiilor date îi va fi mai clar cititorului după ce va efectua munca personală propusă și va citi capitolul următor. De aceea recomand să revenim la aceste indicații în cursul lecturii cap. II și să medităm asupra lor încă o dată după terminarea ei.

## CAPITOLUL II

### ANALIZA EXEMPLELOR TRATATE ÎN CAPITOLUL I

La exemplul 1. Afirmând că din părțile *I*, *II*, *III*, *IV* ale pătratului poate fi compus un dreptunghi, ne încredem în evidența aparentă sau într-o experiență grosolan efectuată (dacă am decupat din hîrtie). Pe ce bază putem considera că figurile *I* și *III*, alipite (sau, ceea ce este același lucru, *II* și *IV*), formează un triunghi adică că latura înclinată a trapezului *I* și ipotenuza triunghiului *III* formează, în acest caz, o dreaptă și nu o linie „frîntă” în punctul comun al acestor segmente? Faptul că nu vedem această „frîngere” în figură, sau că nu o observăm la decuparea din hîrtie, nu poate desigur servi drept argument: chiar lăsînd la o parte imperfecțiunea percepțiilor noastre vizuale, observăm că acestea se referă nu la figuri geometrice, ci la modelele

lor fizice și deci nu sînt potrivite pentru demonstrații geometrice riguroase<sup>1)</sup>).

Este suficient să descoperim această lacună, pentru ca să recunoaștem că întreaga demonstrație este inconsistentă și chiar să refuzăm s-o studiem mai departe, atîta timp cît această lacună nu este împlinită. Dar noi nu vom merge pe acest drum, ci vom încerca să clarificăm pînă la capăt problema „frîngerii“.

Dacă, de exemplu, am reuși să demonstrăm că unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  din fig. 1 dau ca sumă  $2d$  sau, în loc de aceasta, că unghiurile  $\alpha$  și  $\alpha'$  din aceeași figură sînt egale între ele, atunci absența „frîngerii“ ar fi dovedită și demonstrația ar reîntra în drepturile ei. Este acest lucru posibil? Raționînd în mod indirect, prin reduceri la absurd, urmează să răspundem negativ la această întrebare, deoarece răspunsul pozitiv ne-ar duce la egalitatea  $441=442$ .

De altfel, putem să ne convingem și în mod direct de inegalitatea unghiurilor  $\alpha$  și  $\alpha'$  și, totodată, să lămurim care dintre ele este mai mare. Cele cîteva rînduri care urmează pot fi înțelese de cititorul care cunoaște cît de puțină trigonometrie, de exemplu, atîta cît se face în clasa a VIII-a a școlii medii (în loc de trigonometrie, s-ar putea folosi proprietățile triunghiurilor asemenea). Din triunghiul *III* fig. 1, obținem tangenta unghiului  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{8}$$

Dacă în trapezul *I* coborîm perpendiculara (care nu este arătată în fig. 1) din vîrfurile unghiului  $\beta$  pe baza mare, se formează un triunghi dreptunghic cu catetele 13 și  $13 - 8 = 5$ , din care deducem

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{13}{5}$$

Și, deoarece,  $\frac{21}{8} > \frac{13}{5}$ , mai precis  $\frac{21}{8} - \frac{13}{5} = \frac{1}{40}$ , rezultă

$\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \alpha'$  și

$$\alpha > \alpha', \quad \alpha + \beta > 2d.$$

<sup>1)</sup> În istoria omenirii, acest lucru nu a fost înțeles chiar dintr-o dată. Într-un vechi templu indian, de prin anul 1000 î.e.n., s-au găsit — cu ocazia unor săpături arheologice — unele inscripții matematice, printre care o figură geometrică reprezentată pe un perete. Figura se referea, probabil, la regula pentru aflarea ariei cercului. În loc de demonstrație, lîngă figură era scris „Privește“.



Acum situația este clară: părțile *I*, *II*, *III*, *IV* ale pătratului se pot așeza în adevăr în interiorul dreptunghiului, dar ele nu acoperă complet acest dreptunghi, ci lasă un „gol”, de forma unui paralelogram foarte îngust, o „fantă”, care merge de-a lungul diagonalei dreptunghiului. Nu trebuie să ne mire că nu observăm această fantă: deoarece pe lungimea ei de 36,4... (cm), ea

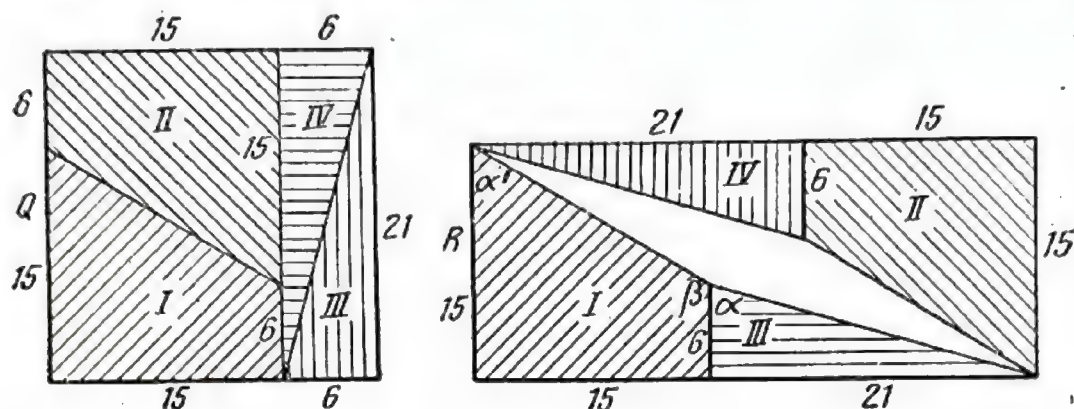


Fig. 15

ocupă în totul o arie de 1 (cm<sup>2</sup>), tocmai prisosul care a rezultat la trecerea de la pătratul *Q* la dreptunghiul *R*. Cititorul care vrea să-și facă o imagine și mai intuitivă nu are decât să schimbe datele numerice din fig. 1, de exemplu, în fig. 15, unde „fantă” are o arie de 99 (cm<sup>2</sup>) față de aria de 540 (cm<sup>2</sup>) a întregului dreptunghi.

La exemplul 2. Eroarea comisă aici este dintre cele mai răspândite și cunoscută încă în logica clasică, sub o complicată denumire latină („ignoratio elenchi”) care, în traducere liberă,

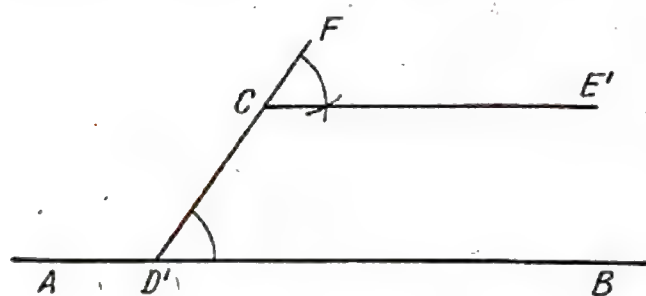


Fig. 16

sună: „neînțelegerea a ceea ce s-a demonstrat”.

În adevăr, ce se dovedește prin raționamentul la care se referă fig. 2? Se demonstrează numai că, dacă se construiește o dreaptă paralelă prin procedeul descris acolo, (cu ajutorul a două perpendiculare) se obține

o dreaptă unică. Dar este acest procedeu unic? Nu, se știe bine că există alte construcții care conduc la același rezultat. De exemplu, în locul piciorului *D* al perpendicularei *CD*, (v.

fig.2), am putea să luăm orice alt punct  $D'$  (fig. 16) pe dreapta  $AB$ , să-l unim cu  $C$  prin dreapta  $D'F$  și să construim, în punctul  $C$  al razei  $CF$ , unghiul  $FCE'$  egal cu unghiul  $CD'B$  (astfel încît razele  $CE'$  și  $D'B$  să fie de aceeași parte a lui  $FD'$ ). În virtutea teoremei (demonstrate înaintea axiomei) cu privire la paralelismul dreptelor în cazul egalității unghiurilor corespondente, se poate afirma că dreapta  $CE'$  este paralelă cu  $AB$ . Dar ce ne garantează că dreptele  $CE$  din fig. 2 și  $CE'$  din fig. 16 coincid? A afirma că diferite construcții duc la o aceeași dreaptă<sup>1)</sup> înseamnă a admite fără demonstrație ceea ce voiam să demonstrăm.

**La exemplul 3.** Să precizăm presupunerile noastre: oricare ar fi dreptele paralele și secanta, oricare ar fi perechea de unghiuri interne de aceeași parte a secantei, suma acestor unghiuri este sau totdeauna mai mare decît  $2d$ , sau totdeauna mai mică decît  $2d$ , sau totdeauna egală cu  $2d$ . Dar aici numai la prima vedere s-au epuizat toate cazurile posibile: s-a scăpat din vedere posibilitatea ca suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei să fie uneori mai mare, uneori mai mică, iar uneori poate chiar egală cu  $2d$ . Această presupunere nu duce la nici o contradicție. De exemplu, dacă presupunem că  $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 > 2d$ , iar  $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 < 2d$  (v. fig. 3), aceasta nu împiedică să avem  $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = 4d$ .

Să observăm că, fără a intra în analiza amănunțită a demonstrației, am putea să arătăm de la început inconsistența ei, după un criteriu exterior: această demonstrație nu folosește absolut de loc faptul că dreptele  $AB$  și  $CD$  sînt paralele. Dacă ea ar fi adevărată, ar fi demonstrată următoarea teoremă: „dacă două drepte oarecare sînt tăiate de o a treia, suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei este egală cu  $2d$ “, și aceasta este cu siguranță neadevărat. Tocmai în acest caz, cînd renunțăm la presupunerea că dreptele  $AB$  și  $CD$  sînt paralele, în mod obișnuit se va realiza a patra posibilitate, omisă în demonstrația pe care am infirmat-o: de o parte a secantei, suma unghiurilor va fi mai mare, iar de cealaltă parte mai mică decît  $2d$ .

**La exemplul 4.** Ne-am obișnuit cu faptul că suma unghiurilor unui triunghi este aceeași (anume  $2d$ ) pentru toate triunghiurile, indiferent de forma sau de dimensiunile lor; de aceea, cei mai mulți dintre noi nu protestează cînd aud: „vom nota prin  $x$  suma unghiurilor unui triunghi (oarecare)“. Însă,

<sup>1)</sup> Se știe că, în geometria lui Lobacevski, dreptele  $CE$  și  $CE'$  nu coincid.



În momentul în care demonstrăm teorema care ne interesează, nu știm nimic despre suma unghiurilor unui triunghi și nu avem nici un motiv să presupunem că ea este aceeași pentru toate triunghiurile. Desigur, am putea să admitem, fără demonstrație, că suma este aceeași și atunci raționamentul dat ar demonstra în adevăr că această sumă este egală cu  $2d$ . Dar aceasta ar însemna numai că, în locul axiomei paralelor, am introdus o altă axiomă care nu oferă, față de prima, nici un fel de avantaje.

**La exemplul 5.** În istoria matematicii, se cunosc mai multe cazuri în care s-a comis o aceeași eroare: s-a admis, fără motiv, că printre numerele unei mulțimi infinite trebuie să existe unul care să fie cel mai mare (în alte cazuri, unul care să fie cel mai mic). De altfel, nimănui nu-i trece prin minte să caute pe cel mai mare dintre numerele 1, 2, 3, ... ale șirului natural. Dar lipsa unui astfel de număr se explică prin aceea că numerele cresc aici mereu și acest șir nu are sfârșit. Dar șirul fracțiilor al căror numărător este cu o unitate mai mic decât numitorul

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

se poate, de asemenea, prelungi nemărginit, adunând de fiecare dată câte o unitate la numărător și la numitor; ca și în primul caz, numerele vor crește, dar printre ele nici unul nu este cel mai mare. În general, nu există o fracție subunitară care să fie cea mai mare.

Următorul exemplu din geometrie este mai apropiat de al nostru: unghiul interior al unui poligon regulat<sup>1)</sup>, egal cu  $\frac{2d(n-2)}{n}$  unde  $n$  este numărul laturilor, este întotdeauna mai mic decât  $2d$ , dar nu există poligon regulat cu cel mai mare unghi interior.

În demonstrația analizată, punctul slab îl constituie tocmai afirmația că printre triunghiurile despre care știm numai că suma unghiurilor fiecăruia dintre ele nu este mai mare de  $2d$ , există un triunghi cu cea mai mare sumă a unghiurilor. Aceasta este o afirmație nedemonstrată, pe care am putea-o lua drept o nouă axiomă, în locul axiomei paralelelor.

Reunind rezultatele obținute în urma analizei exemplurilor 4 și 5, ajungem la concluzia: se poate demonstra că suma unghiurilor unui triunghi este egală  $2d$ , făcând astfel ca axioma

<sup>1)</sup> Astfel se numesc poligoanele care au toate laturile și toate unghiurile egale.

paralelelor să fie de prisos, dacă admitem, fără demonstrație, una dintre următoarele două afirmații: 1) în toate triunghiurile, suma unghiurilor este aceeași; 2) există un triunghi (cel puțin unul) avînd cea mai mare sumă a unghiurilor.

La exemplul 6. Nu s-au luat în considerare toate cazurile posibile (cu privire la ultimele două cuvinte este util să ne amintim de cele spuse în nota de la p. 12, anume nu s-a luat în seamă posibilitatea ca, dintre cele două perpendiculare  $NP$  și  $NQ$ , una să cadă pe o latură a triunghiului  $ABC$ , iar cealaltă pe prelungirea unei laturi (fig. 17, unde deocamdată nu trebuie să ne ocupăm de cerc). Dacă acest caz are loc, unul dintre unghiurile de la baza  $AB$  a triunghiului  $ABC$

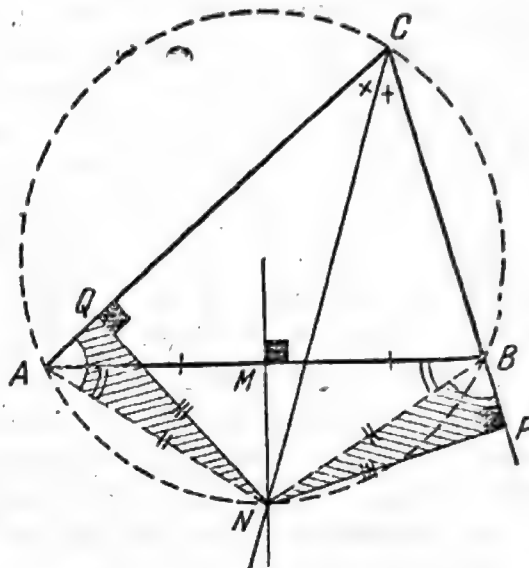


Fig. 17

este diferența a două unghiuri, iar celălalt este suplimentul sumei aceluiași unghiuri; de aici, se înțelege, nu se pot trage nici un fel de concluzii cu privire la unghiurile de la bază, deci nici cu privire la egalitatea laturilor. Este suficient să stabilim această lacună în demonstrație pentru ca să-i recunoaștem inconsistența. Mai mult, dacă triunghiul dat este *neisoscel*, se poate demonstra (raționînd prin reducere la absurd) că toate cazurile considerate (fig. 5, 6, 7) sînt imposibile, iar unicul caz posibil (fig. 17) a fost omis<sup>1)</sup>.

De altfel, vom da acum o demonstrație directă a faptului că, într-un triunghi *neisoscel*, poziția părților figurii este tocmai

<sup>1)</sup> La prima vedere, s-ar putea crede că au fost omise și cazurile în care punctul  $N$  se află în interiorul sau pe baza triunghiului, iar punctele  $P$  și  $Q$  se află de părți diferite ale lui  $AB$  (se înțelege, nu este nimic imposibil în afirmația că perpendiculara coborîtă dintr-un punct interior al unui triunghi pe o latură a lui cade pe prelungirea laturii; ajunge să ne gîndim la un triunghi obtuzunghi). Dar, în textul imediat următor, se va arăta că, pentru un triunghi *neisoscel*, intersecția axei cu bisectoarea nu poate avea loc decît în afara triunghiului. Cititorul care cunoaște teorema „bisectoarea unui unghi al unui triunghi împarte latura opusă în părți proporționale cu celelalte două laturi” poate încerca să stabilească pe altă cale această proprietate a punctului de intersecție.



aceea reprezentată în fig. 17. În adevăr, fie  $CA > CB$ . Să circumscriem triunghiului  $ABC$  un cerc; conform proprietății unghiurilor înscrise, bisectoarea unghiului  $C$  trebuie să treacă prin mijlocul  $N$  al arcului  $AB$ , pe care se sprijină acest unghi. Dar prin același mijloc  $N$  trebuie să treacă axa de simetrie a coardei  $AB$ . Așadar, intersecția bisectoarei cu axa are loc pe cercul descris adică, evident, în afara triunghiului  $ABC$ . Perpendicularele din  $N$  pe  $CB$  și  $CA$  vor cădea pe aceste laturi sau pe prelungirile lor, după cum unghiurile  $NAC$  și  $NBC$  sînt ascuțite sau obtuze. În locul acestor unghiuri înscrise, vom considera arcele pe care acestea se sprijină. Deoarece am presupus  $CA > CB$ , avem  $\widehat{CA} > \widehat{CB}$ , iar de aici și din  $\widehat{AN} = \widehat{BN}$  rezultă că  $\widehat{CAN} > \widehat{CBN}$ . Aceasta înseamnă că arcul  $CAN$  este mai mare decît o jumătate de cerc, iar arcul  $CBN$  mai mic decît o jumătate de cerc, deci unghiul  $CBN$  este obtuz, iar unghiul  $CAN$  este ascuțit. Deci, perpendiculara  $NP$  cade pe prelungirea laturii  $CB$ , iar perpendiculara  $NQ$  chiar pe latura  $AC$  (propunem cititorilor, ca exercițiu, să demonstreze că punctele  $P, M, Q$  se află pe o aceeași dreaptă).

La exemplul 7. Demonstrația pare, la început, convingătoare deoarece creează iluzia că s-ar fi considerat toate cazurile esențial diferite<sup>1)</sup> (punctul  $N$  se află dedesubtul dreptei  $AB$ , deasupra ei și pe ea). Totuși,

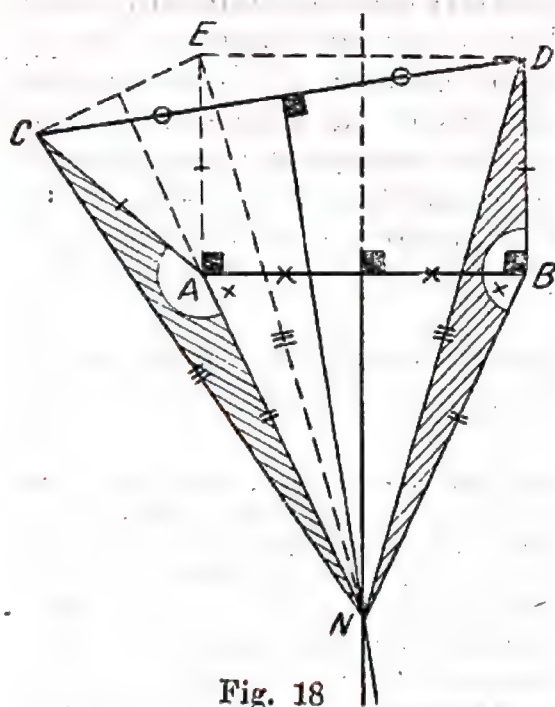


Fig. 18

în exemplul nostru, desfășurarea demonstrației nu depinde numai de poziția punctului  $N$ . Se poate observa că, în cazul 3, unghiul drept  $ABD$  adunat cu unghiul ascuțit  $ABN$  va da întotdeauna unghiul obtuz  $DBN$ ; dar în ce privește unghiul obtuz  $CAB$ , se poate presupune că, adunat cu unghiul ascuțit  $NAB$  va da tot un unghi obtuz (fig. 9), dar poate să dea și unul „supra-obtuz” (adică mai mare decît  $180^\circ$ , fig. 18), ceea ce schimbă radical situația.

<sup>1)</sup> Două cazuri trebuie considerate ca esențial diferite, dacă demonstrația valabilă pentru un caz nu poate fi repetată întocmai pentru celălalt.

Așadar, este necesar să deosebim în cazul 3 două variante: unghiul obtuz  $CAB$  și triunghiul  $CAN$  se află 1) de aceeași parte, (fig. 9) a dreptei  $AC$ , 2) de o parte și cealaltă (fig. 18 unde, la început, nu trebuie să dăm atenție liniilor întrerupte). Prima variantă în care unghiul  $CAB$  este o parte a unghiului  $CAN$ , a fost studiată și duce la egalitatea unghiurilor  $DBA$  și  $CAB$ . A doua variantă însă nu duce la această concluzie: unghiul drept  $DBA$  se prezintă ca și mai înainte ca *diferență* a două unghiuri ( $\angle DBN$  și  $\angle ABN$ ), iar unghiul obtuz  $CAB$  completează pînă la *4d* suma a două unghiuri ( $\angle CAN$  și  $\angle BAN$ ). Raționînd prin reducere la absurd, trebuie să ajungem la concluzia că a doua variantă este singura posibilă.

Să facem o construcție auxiliară care să permită să ne dăm seama mai bine de poziția părților figurii. Din punctul  $A$ , ridicăm o perpendiculară pe  $AB$  (acum intervin și liniile întrerupte din fig. 18), așternem pe ea segmentul  $AE$ , egal cu  $BD$  și de același sens cu el; evident, avem de asemenea  $AE = AC$ . Unim  $E$  cu punctele  $D$ ,  $N$  și  $C$ ; deoarece  $ABDE$  este un dreptunghi, axa de simetrie a segmentului  $AB$  va fi axă de simetrie și pentru segmentul  $ED$ , deci  $NE = ND$ , și de aici  $NE = NC$ . Prin urmare, fiecare dintre punctele  $A$  și  $N$  este egal depărtat de extremitățile segmentului  $CE$ , deci dreapta  $AN$  este axă de simetrie pentru acest segment. Triunghiul  $DBN$  trece, printr-o simetrie în raport cu axa de simetrie a segmentului  $AB$ , în triunghiul  $EAN$  (avînd o orientare opusă<sup>1)</sup>), iar acesta din urmă, printr-o simetrie în raport cu dreapta  $AN$ , trece în triunghiul  $CAN$  (orientat la fel ca triunghiul  $DBN$ ). Așadar,  $CAN$  se obține din  $DBN$  printr-o rotație a acestuia din urmă, în jurul vîrfului  $N$ , cu unghiul  $BN A (= \angle EAC$ , adică egal cu diferența între unghiul obtuz și cel drept luate la început).

**La exemplul 8.** Să ne convingem, în primul rînd, că teorema nu este adevărată. Pentru aceasta, este suficient să aducem un „contra exemplu“, adică să indicăm un caz în care ipoteza teoremei este satisfăcută, dar concluzia nu. Obținem un astfel de exemplu, dacă împărțim în două un triunghi isoscel oarecare  $LMN$  ( $LN = MN$ , fig. 19) prin segmentul  $NP$  pornind de la vîrf, dar *diferit de mediană*. Triunghiurile obținute  $LNP$  și  $MNP$  (correspondența se stabilește prin ordinea de enumerare a vîrfurilor) au latura  $NP$  comună și, în plus,  $LN = MN$  și  $\angle L = \angle M$ ;

<sup>1)</sup> Cititorul care nu posedă noțiunea de „orientare a unui triunghi“ poate fie să nu țină seamă de cuvintele de paranteză, fie să recurgă la bibliografie.



ipoteza teoremei este satisfăcută, în timp ce triunghiurile sînt, bineînțeles, neegale (în primul rînd pentru că  $LP \neq MP$ ).

Dar, chiar fără să știm dacă teorema este adevărată sau nu, putem observa o lacună în demonstrație, constînd în faptul (revenim la notațiile din fig. 10 — 12) că s-au omis cazurile în care dreapta  $CC_2$  trece printr-una dintre extremitățile segmentului  $AB$  ( $A$  sau  $B$ ) adică laturile  $CA$  și  $C_2A$  sau  $CB$  și  $C_2B$  sînt una în prelungirea celeilalte.

În primul dintre aceste două cazuri (în fig. 20 laturile egale  $AC$  și  $AC_2$  sînt în prelungire) concluzia teoremei este totuși adevărată: după alipi-

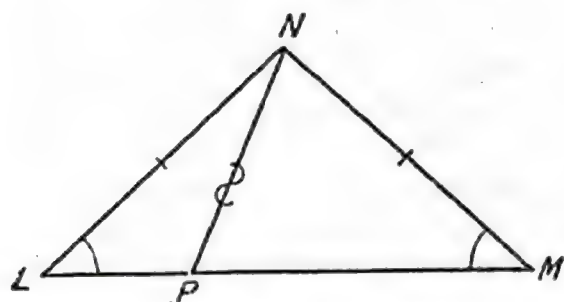


Fig. 19

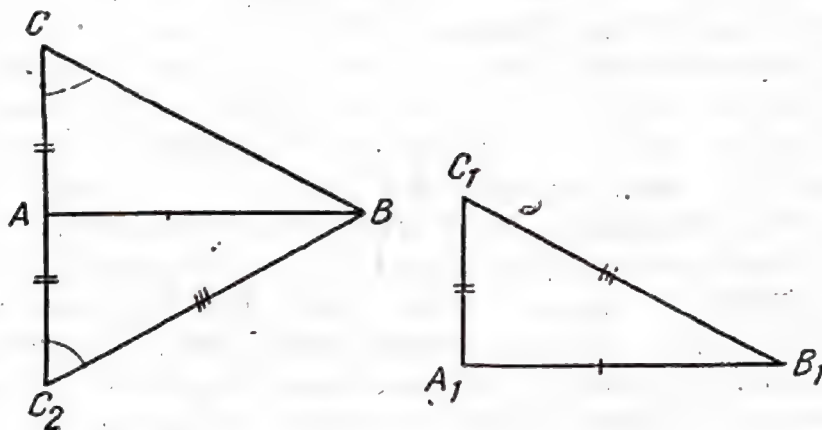


Fig. 20

rea triunghiului  $A_1B_1C_1$  la  $ABC$ , obținem triunghiul  $BCC_2$  isoscel în virtutea egalității unghiurilor  $C$  și  $C_2$ , deci

$$BC = BC_2 = B_1C_1.$$

Adăugăm că aceasta poate avea loc numai în cazul triunghiurilor dreptunghice (în fig. 20 stînga, unghiurile în punctul  $A$  sînt adiacente și egale<sup>1)</sup>)

<sup>1)</sup> Să observăm că trebuie să prevedem această posibilitate (ca vîrfurile  $C$ ,  $A$ ,  $C_2$  să se afle pe o aceeași dreaptă) și în demonstrația obișnuită a cazului de egalitate a triunghiurilor, cînd acestea au laturile respectiv egale. În această ipoteză, atît acolo cît și în cazul nostru, demonstrația se face cu succes observînd de asemenea că triunghiurile egale trebuie să fie dreptunghice.

O altă situația se obține cînd sînt în prelungire laturile ( $BC$  și  $BC_2$ , fig. 21) despre care nu știm nimic din ipoteza teoremei. Desigur, se obține triunghiul isoscel  $ACC_2$ , dar nu avem nici o

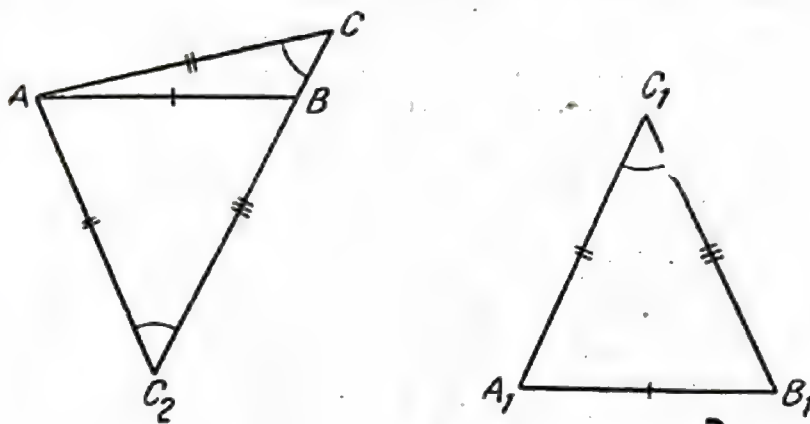


Fig. 21

posibilitate să tragem de aici vreo concluzie cu privire la laturile  $CB$  și  $C_2B$ . Mai mult, cititorul își va reaminti imediat figura triunghiului isoscel (fig. 19), împărțit în două părți inegale, și va trage concluzia că, în acest caz, triunghiurile  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$  nu sînt în general egale (în afară de cazul în care unghiurile la vîrfurile  $B$  și  $B_1$  sînt drepte; atunci avem din nou egalitate).

**O b s e r v a Ț i a 1.** Considerațiile precedente ne sugerează cum s-ar putea „corecta” teorema noastră, adică cu ce teoreme înrudite, dar adevărate, ar putea fi înlocuită. Dăm două exemple de astfel de „corectări”.

a) Dacă între elementele a două triunghiuri s-a stabilit o corespondență, astfel încît două laturi și unghiul opus uneia dintre ele într-un triunghi sînt egale cu elementele respective ale celuilalt, atunci unghiurile opuse laturilor egale ale celei de a doua perechi (în toate figurile 10—12 și 20—21 aceste unghiuri sînt notate prin literele  $B$  și  $B_1$ ) sînt sau egale între ele, și atunci triunghiurile sînt egale (fig. 10—12 și 20), sau suplimentare (fig. 21).

b) Dacă între elementele a două triunghiuri s-a stabilit o corespondență, astfel încît două laturi și unghiul opus celei mai mari dintre ele într-un triunghi sînt egale cu elementele respective ale celuilalt, triunghiurile sînt egale.

În adevăr, acum cazul reprezentat în fig. 21 este exclus: nici unul dintre unghiurile  $B$  și  $B_1$  nu poate fi obtuz (și nici măcar drept), deoarece nu este opus celei mai mari laturi. Această teoremă se dă uneori în manualele de geometrie sub denumirea de „cazul al IV-lea de egalitate a triunghiurilor”.



**O b s e r v a Ț i a 2.** Următorul fapt pare curios la prima vedere: cazul egalității triunghiurilor poate fi făcut într-un anumit sens „oricît de apropiat” de cazul inegalității lor. De exemplu, dacă se compară fig. 10 cu fig. 21, punctul  $B$  din fig. 10 ar putea să fie situat oricît de aproape de dreapta  $CC_2$ ; oricît de „îngust” ar fi triunghiul  $CBC_2$ , el va fi neapărat isoscel, deci demonstrația egalității triunghiurilor își păstrează valabilitatea. Dar este suficient ca punctul  $B$  să cadă exact pe dreapta  $CC_2$  (fig. 21), pentru ca egalitatea segmentelor  $CB$  și  $C_2B$ , și o dată cu ea și egalitatea triunghiurilor, să nu mai fie obligatorie. Facem acum cîteva considerații avînd ca scop să explice acest fenomen.

Uneori, este comod să considerăm trei puncte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  situate pe o aceeași dreaptă ca vîrfurile unui „triunghi degenerat”; dacă în plus,  $Q$  se află între  $P$  și  $R$ , unghiurile „triunghiului” se consideră  $\sphericalangle P = 0$ ,  $\sphericalangle R = 0$ ,  $\sphericalangle Q = 2d$ . Sensul acestei terminologii este clar: atîta timp cît punctele sînt situate „aproape” pe aceeași dreaptă, ele determină totuși un triunghi cu două unghiuri „foarte mici” și un al treilea „apropiat” de  $2d$ . Prin deformarea continuă a figurii, aceste trei puncte pot ajunge exact pe aceeași dreaptă și, pentru acest caz, este de dorit să se păstreze denumirile precedente. În aceste condiții, unele teoreme sînt la fel de valabile pentru triunghiurile „veritabile” ca și pentru cele „degenerate”; astfel este, spre exemplu, teorema: suma unghiurilor unui triunghi este egală cu  $2d$ . În schimb, alte teoreme își pierd valabilitatea, în cazul trecerii la triunghiuri degenerate. Printre acestea, se află în particular teorema: un triunghi cu două unghiuri egale este isoscel. Această teoremă este adevărată, dacă unghiurile egale sînt diferite de zero; dar în triunghiul degenerat  $PQR$ , despre care tocmai s-a vorbit, din egalitățile  $\sphericalangle P = \sphericalangle R = 0$ , nu rezultă nicidecum că  $PQ = QR$ , adică că punctul  $Q$  este mijlocul segmentului  $PR$ ; el poate fi situat oriunde pe acest segment. Acest exemplu are o legătură directă cu problema care ne interesează. Atîta timp cît, în figura 10 sau 11, punctul  $B$  nu se află pe dreapta  $CC_2$ , oricît de mici ar fi unghiurile adiacente laturii  $CC_2$  în triunghiul  $BCC_2$ , din egalitatea acestor unghiuri rezultă că  $CB = C_2B$ . Dar dacă, ca în fig. 21, triunghiul  $BCC_2$  degenerază, amîndouă unghiurile considerate se anulează, triunghiul poate să nu mai fie isoscel și, o dată cu aceasta, concluzia teoremei își pierde valabilitatea.

**La exemplul 9.** Afirmația teoremei este falsă, deoarece se poate construi ușor un dreptunghi înscris într-un pătrat și avînd laturile neegale: este suficient să luăm laturile unui dreptunghi

paralele cu diagonalele pătratului (dar fără să împartă laturile pătratului în jumătate). Mai exact (fig. 22); pornind de la două vîrfuri opuse ale pătratului, de exemplu de la  $A$  și  $C$ , așternem de-a lungul laturilor lui patru segmente egale  $AM = AQ = CM = CP$ , de lungime arbitrară

diferită de  $\frac{a}{2}$ , unde  $a$  este

lungimea laturii pătratului; părțile rămase din laturile pătratului sînt de asemenea egale între ele:  $MB = BN =$

$= PD = DQ \neq \frac{a}{2}$ . Unind suc-

cesiv punctele  $M, N, P, Q$ , obținem patru triunghiuri dreptunghice isoscele, egale două cîte două:  $\triangle AMQ \equiv \triangle CPN$ ,  $\triangle BNM \equiv \triangle DQP$ . De unde  $QM = PN$ ,  $MN = QP$ , patrulaterul  $MNPQ$  este un paralelogram

și anume un dreptunghi, deoarece, de exemplu,  $\sphericalangle MQP = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$  (în același timp, observăm că laturile patrulaterului  $MNPQ$ , făcînd cu laturile pătratului unghiuri de  $45^\circ$ , trebuie să fie paralele cu diagonalele acestuia; de unde se obține o nouă demonstrație a faptului că  $MNPQ$  este un dreptunghi).

Independent de construcția pe care am expus-o acum, se poate observa următorul defect logic în demonstrația de la p. 19: nemai dînd crezare figurii arbitrară 13, am considerat că dintre cele două proiecții — a punctului  $P$  pe  $AB$  și a punctului  $Q$  pe  $BC$  — una ( $R$ ) se află pe o latură a patrulaterului  $MBNO$ , iar cealaltă ( $S$ ) pe prelungirea unei laturi; cu alte cuvinte că, dintre cele două unghiuri egale  $\sphericalangle OMR$  și  $\sphericalangle ONS$ , unul este interior, iar celălalt exterior patrulaterului  $MBNO$ . Această poziție a punctelor sau unghiurilor nu a fost fundată prin nici un fel de argumente și nici nu putea să fie: deoarece cu aceeași ipoteză a teoremei este compatibilă și fig. 22 unde unghiurile amintite sînt amîndouă interioare.

Trăgînd concluzia, putem formula teorema corectată, în mai multe variante, de exemplu:

1) Dacă un dreptunghi este înscris într-un pătrat, astfel încît una dintre laturile celui dintîi nu este paralelă cu niciuna dintre diagonalele celui de al doilea, acest dreptunghi este un pătrat; sau

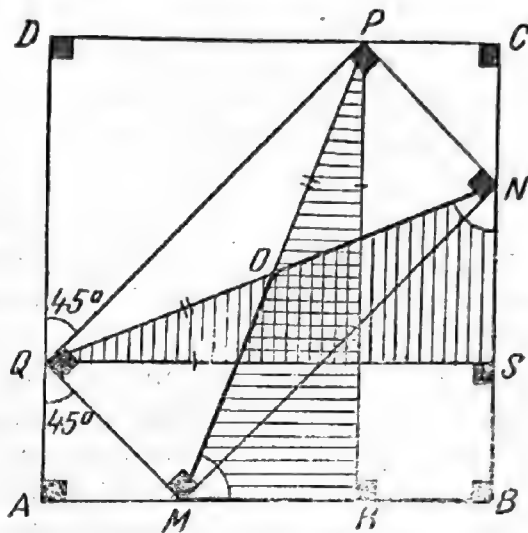


Fig. 22



2) dacă un dreptunghi cu laturi neegale este înscris într-un pătrat, laturile sînt paralele cu diagonalele pătratului.

La exemplul 10. Eroarea este de aceeași natură logică ca și în exemplul 2: „neînțelegerea a ceea ce se demonstrează”; cu alte cuvinte, substituirea a ceea ce trebuie demonstrat, cu o altă propoziție, care se justifică efectiv, dar din care propoziția de demonstrat nu rezultă nicidecum. Să analizăm încă o dată desfășurarea raționamentului și să ne ușurăm munca de găsire a erorii, înlocuind fig. 14 cu alta (fig. 23), unde razele  $AQ$  și  $BP$  se intersectează (pentru a înlătura acuzația că figura rezolvă dinainte problema existenței unui punct de intersecție, au fost făcute mici întreruperi la trasarea razelor  $AQ$  și  $BP$ ). Dacă, pentru prescurtare, notăm cu  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$  — primul, al doilea, al treilea, ... segment al oblicei, iar cu  $BB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$  — primul, al doilea, al treilea, ... segment ale perpendicularei, trebuie să recunoaștem ca demonstrate: 1) că procesul așternerii acestor segmente nu are sfîrșit, astfel încît se pot obține segmente cu un număr de ordine oricît de mare; 2) că segmentele cu *același număr de ordine* nu se

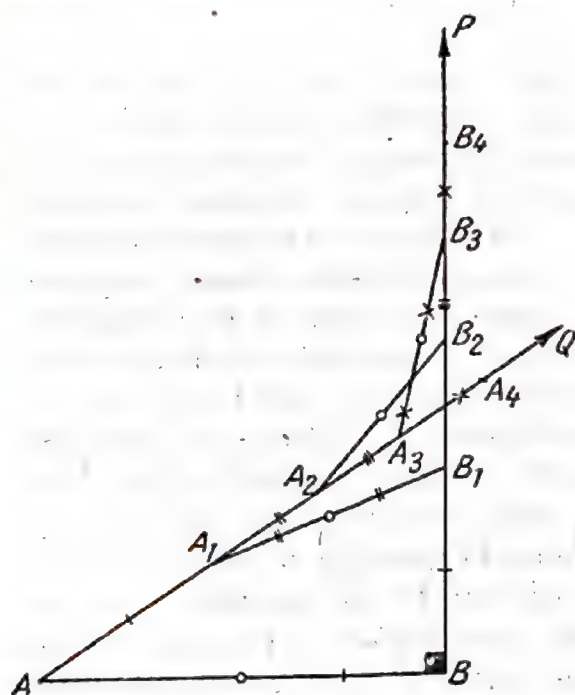


Fig. 23

intersectează, adică nu au puncte comune nici primul segment al perpendicularei cu primul segment al oblicei, nici al doilea cu al doilea..., nici al sutelea cu al sutelea etc. De ce, însă, nu s-ar putea intersecta segmentele cu *numere de ordine diferite*, să zicem, segmentul al 20-lea al perpendicularei cu segmentul al 25-lea al oblicei? Dar atunci cînd afirmăm că perpendiculara și oblica nu se taie nicăieri, noi trebuie să arătăm că *nici unul* dintre segmentele perpendicularei nu are puncte comune cu *nici unul* dintre segmentele oblicei. Și nu putem să ne mulțumim, în locul

acestei demonstrații, cu faptul că nici unul dintre segmentele perpendicularei nu intersectează segmentul de oblică cu *același număr de ordine*. Dacă privim fig. 23 (în care s-au păstrat notațiile din fig. 14; ambele figuri au fost efectuate fără deformări

intenționate), ne convingem, desigur, „din ochi“ că aici al doilea segment al perpendicularei se intersectează cu al patrulea segment al oblicei<sup>1)</sup>. Acest sofism este remarcabil prin contrastul între caracterul elementar al erorii și dificultatea de a o găsi.

**O b s e r v a Ț i e .** Așa cum s-a mai spus (vezi nota de la p. 19), aici am împrumutat numai ideea unui sofism, reprodus de Proclus. Acesta consideră două drepte oarecare (de fapt două raze care nu sînt în prelungire și au origini diferite) și demonstrează, cu ajutorul procesului infinit de așternere a segmentelor descris mai sus, că aceste drepte nu se intersectează. Proclus caracterizează just eroarea logică comisă în acest raționament sofistic, atunci cînd spune că nu se demonstrează decît imposibilitatea de a obține punctul de intersecție cu ajutorul acestei construcții, ceea ce nu înseamnă nici decum că acest punct nu există. Dar, judecînd după expunerea lui Bonola, nu putem fi convinși de faptul că Proclus a pătruns mai adînc esența geometrică a erorii comise; în orice caz, autorul italian, apropiat de noi în timp, greșește în mod evident atunci cînd spune că inaccesibilitatea punctului de intersecție în acest caz are același caracter ca în celebrul sofism „Ahile și broasca țestoasă“. Această apropiere făcută de Bonola vrea, desigur, să spună următoarele: punctul de intersecție al razelor  $AQ$  și  $BP$  (să-l numim  $K$ ) este inaccesibil în construcția dată, tocmai pentru faptul că, atunci cînd  $n$  crește nemărginit, punctele  $A_n$  și  $B_n$  tind către punctul  $K$ , drept limită, fără să-l atingă vreodată. În varianta noastră, această presupunere este imposibilă, deoarece din egalitatea  $AA_n = BB_n$ , adevărată pentru orice  $n$ , ar rezulta că  $AK = BK$ , adică ipotenuza ar fi egală cu o catetă. Dar această imposibilitate se păstrează și în construcția lui Proclus — Bonola, cu excepția cazului particular în care triunghiul  $AKB$  este isoscel. Așadar și aici are loc în general intersecția unor segmente cu numere de ordine diferite și nu tinderea extremităților segmentelor cu același număr de ordine către o limită comună.

**Concluzii.** Cititorul se poate întreba: dacă erorile din raționamentele matematice sînt uneori atît de bine ascunse, încît nu pot fi descoperite decît după o analiză minuțioasă, mai este matematica un fundament atît de solid pentru științele exacte (fizica, tehnica etc.) cît ne-am obișnuit să o considerăm?

Desigur, nici o metodă științifică nu ne garantează că nu vom ajunge la concluzii greșite; mai este necesar să folosim această metodă în mod corect. Aceasta înseamnă numai că trebuie să studiem izvoarele posibile ale erorilor, să fim mai exigenți în ce privește argumentarea afirmațiilor noastre. Iar pentru a deveni limpede cît este de real pericolul de a comite o eroare care să poată rămîne neobservată, trebuie să facem apel la istoria științei noastre.

Istoria cunoaște erori izolate în lucrările matematicienilor, dar ele nu au oprit niciodată progresul științei și au fost desco-

---

<sup>1)</sup> Cunoscînd unghiul  $A$ , am putea să găsim, cu ajutorul trigonometriei, numerele de ordine ale segmentelor care se intersectează.



perite pe o treaptă mai înaltă. Un exemplu convingător este istoria multiseclară a încercărilor de a demonstra axioma paralelelor despre care am mai amintit. Despre această axiomă, Lobacevski scria în 1823: „O demonstrație riguroasă a acestui adevăr nu s-a putut găsi pînă în prezent. Acelea care au fost date se pot numi numai explicații, dar nu merită să fie considerate ca demonstrații matematice în înțelesul deplin al cuvîntului”. Lobacevski a ajuns la această concluzie cu cîțiva ani înainte de remarcabila sa descoperire. În istoria geometriei, ea a și constituit acea treaptă nouă de la înălțimea căreia — la început pentru Lobacevski, iar apoi pentru întreaga lume matematică — a devenit evidentă inconsistența celor mai ingenioase proiecte de demonstrație a axiomei paralelelor.

Cititorii vor găsi alte ilustrații pentru aceste concluzii în capitolele III și IV.

### CAPITOLUL III

#### ERORI DE RAȚIONAMENT, LEGATE DE NOȚIUNEA DE LIMITĂ

Exemplele din acest capitol sînt accesibile numai elevilor din ultimele două clase: aici, vom avea nevoie de cunoașterea lungimii cercului, a noțiunii de limită, a trigonometriei și, în unele cazuri, a geometriei în spațiu.

##### *Exemplul 11. Toate cercurile au aceeași lungime.*

Acest sofism antic este atribuit filozofului grec Aristotel, (sec. IV î.e.n.) și numit „roata lui Aristotel”, din motive care vor fi lămurite imediat.

Amintim o problemă de aritmetică, unde printre date se găsea lungimea circumferinței (acolo se spunea de obicei pur și simplu „circumferința”) roții unei trăsuri sau a unui automobil care se mișcă pe șosea și se cerea să se găsească drumul parcurs, sau reciproc. Ca bază a soluției se lua faptul, în aparență evident, că la fiecare rotație completă a roții în mișcare, ea parcurge un drum egal cu circumferința roții; dacă, de exemplu, roata are „o circumferință” de 2 m și face 30 rotații complete, distanța parcursă este egală cu 60 m. Trebuie să spunem că, dacă mișcarea se face în linie dreaptă, sau dacă nu se cere o precizie deosebită, aceste calcule sînt confirmate de experiență. Circumferința roții

se poate măsura cu ajutorul unei panglici; se poate vedea că roata a făcut o rotație completă urmărind o spiță oarecare, marcată, a acestei roți sau, în loc de aceasta, punând o eclisă care lasă o urmă pe pământ la marginea roții (mulți contori instalați la diferite mașini de transport înregistrează tocmai numărul de rotații și indică distanța, sau — în combinație cu un mecanism de ceasornic — viteza). Desigur, toate aceste calcule sînt corecte

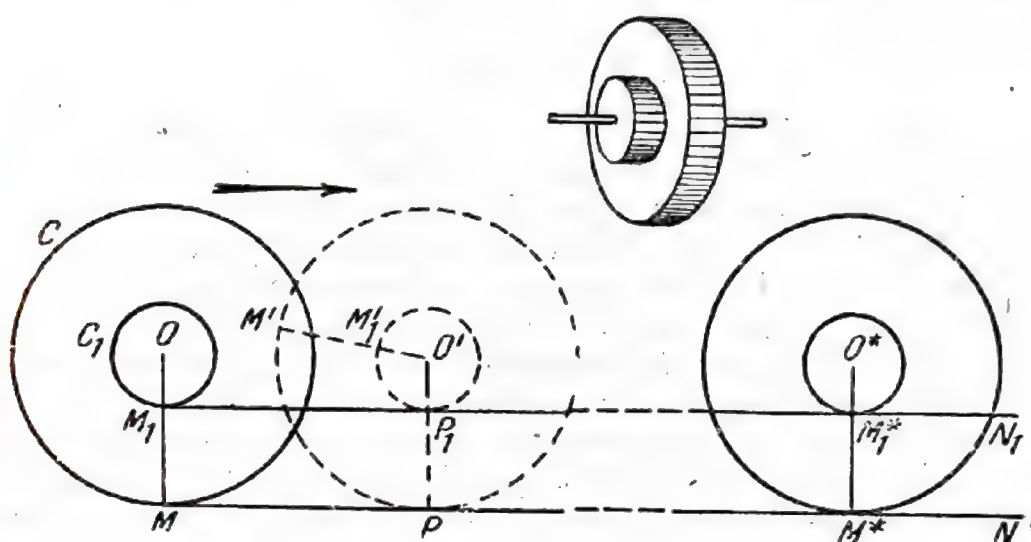


Fig. 24

din punct de vedere practic, dacă roata se învîrtește „normal“, adică nici nu „saltă“ și nici nu „patinează“; în limbajul mecanicii, aceasta se exprimă prin cuvintele „roata se rostogolește fără alunecare“.

Să revenim acum la sofism. Să considerăm două cercuri concenrice  $C$  și  $C_1$  de raze diferite, solidar legate între ele (fig. 24). În același timp, să ne imaginăm un model fizic: două roți cilindrice așezate pe o axă orizontală, de exemplu, și legate solidar între ele (sau chiar astfel: o parte a arborelui cilindric este strunjită sub forma unei noi roți cilindrice, cu aceeași axă, dar cu o rază mai mică, desenul din fig. 24). La cercurile  $C$  și  $C_1$  se duc tangente  $MN$  și  $M_1N_1$ , în punctele  $M$  și  $M_1$ , situate pe aceeași rază  $OM$ . Deoarece cercurile sînt legate solidar, ele se mișcă ca un întreg: cu unghiul cu care se rotește un cerc, se rotește și celălalt. De aceea, dacă cercul  $C$  se mișcă pe dreapta  $MN$ , cercul  $C_1$  se mișcă pe dreapta  $M_1N_1$  (în fig. 24, se indică printr-o săgeată sensul mișcării cercurilor solidar; printr-o linie întreruptă este reprezentată una dintre pozițiile intermediare,  $M'$  și  $M_1'$  sînt noile poziții ale punctelor  $M$  și  $M_1$ ). Pentru modelul fizic, tre-



buie să ne imaginăm că, sub fiecare roată cilindrică, s-a așezat o șină orizontală și atunci când roata mare se învîrtește pe șina ei, ea face ca roata mică să se învîrtească și ea pe cealaltă șină. Să presupunem că cercul  $C$ , rotindu-se pe dreapta  $MN$ , efectuează o rotație completă, în urma căreia punctul  $M$  ocupă poziția  $M^*$ ; în acest caz, cercul  $C_1$  descrie de asemenea o rotație completă, iar punctul  $M_1$  ocupă poziția  $M_1^*$  pe raza  $O^*M^*$ , paralelă cu  $OM$  (deoarece amîndouă razele sînt perpendiculare pe  $MN$ ). De aici, deducem că

$$MM^* = M_1M_1^*,$$

adică ambele cercuri au parcurs, la o rotație completă, drumuri egale, deci au aceeași lungime. Și, deoarece cercurile  $C$  și  $C_1$  sînt absolut arbitrare, afirmația făcută este demonstrată.

**I n d i c ă Ț i e .** Nu vom rezolva dinainte problema soluției pe care o va găsi cititorul din contradicția evidentă care s-a obținut (considerațiile autorului cu privire la aceasta vor fi expuse în cap. IV). Următoarea observație este utilă, credem, oricare ar fi desfășurarea raționamentelor cu privire la acest sofism.

Adeseori se consideră cercul ca limită a unui șir de poligoane regulate înscrise în el (sau circumscrise lui), atunci cînd numărul laturilor lor crește nemărginit<sup>1)</sup>. Aceasta ne sugerează următoarea idee: pentru a ne clarifica procesul de rostogolire a cercului, să rostogolim în locul lui un poligon regulat; cu cît numărul lui de laturi va fi mai mare, cu atît ne vom putea reprezenta mai exact imaginea rostogolirii cercului.

Este evident ce înseamnă „un poligon (convex) se rostogolește (fără alunecare) pe o dreaptă”: să stabilim o anumită ordine de parcurgere a vîrfurilor (și deci a laturilor) poligonului, de exemplu, în sens contrar mersului acelor unui ceasornic, și să presupunem că, în poziția inițială, una dintre laturi este așezată pe dreaptă;

<sup>1)</sup> Aici se folosește în mod intenționat termenul de „limită” (în locul termenului răspîndit „poziție limită”), căruia i se dă un sens absolut exact: oricît de îngust ar fi un inel mărginit de două cercuri concentrice cu un cerc dat și avînd unul raza mai mare, celălalt raza mai mică decît a cercului dat (de exemplu inelul poate fi cuprins între cercurile de raze  $R - \varepsilon$  și  $R + \varepsilon$ , unde  $R$  este raza cercului dat), se găsește un număr  $n$ , astfel încît toate poligoanele regulate înscrise (circumscrise), cu un număr de laturi mai mare decît  $n$  sau egal cu  $n$ , vor fi cuprinse în întregime în inelul considerat, închizînd marginea lui interioară și fiind închise de marginea exterioară. Aceasta nu trebuie confundată cu propoziția (mai des, definiția) foarte cunoscută: „Lungimea cercului este limita șirului perimetrelor poligoanelor regulate înscrise (circumscrise), atunci cînd...”; cum vom vedea (v. mai jos, exemplele 12—14), termenul „limită” nu are același sens în amîndouă exemplele.

rotim poligonul în jurul vârfului comun acestei laturi și celei următoare, pînă cînd pe dreaptă se așterne latura următoare; apoi rotim în jurul vârfului următor etc. Pe scurt, poligonul „se mută” de pe o latură pe alta, rotindu-se de fiecare dată în jurul vârfului comun acestor laturi, rezultatul fiind deplasarea de-a lungul drepte, într-un sens dat.

În cazul unui poligon regulat cu  $n$  laturi (fig. 25, unde  $n = 8$ ) să-i numerotăm vîrfurile:  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$  și să presupunem că, în poziția inițială, latura  $A_1 A_2$  se află pe dreapta pe care se va rostogoli poligonul în sensul  $A_1 A_2$  (indicat cu o săgeată în fig. 25). În radiani, unghiul exterior al poligonului, ca și unghiul lui central, este egal cu  $\frac{2\pi}{n}$  (în alte unități  $\frac{4d}{n}$  sau  $\frac{360^\circ}{n}$ ); de aceea, este suficient să rotim poligonul în jurul vârfului  $A_2$  cu unghiul  $\frac{2\pi}{n}$ , pentru ca latura  $A_2 A_3$  să se aștearnă peste dreaptă. După această rotație, centrul  $O$  al poligonului ocupă poziția  $O'$ , iar vîrfurile  $A_1 A_2 A_3, \dots, A_n$ , respectiv pozițiile  $A'_1, A'_2$  (coincizînd cu  $A_2$ ),  $A'_3, \dots, A'_n$ . O nouă rotație în jurul vârfului  $A'_3$ , cu un unghi  $\frac{2\pi}{n}$ , va aduce poligonul  $A'_1 A'_2 A'_3 \dots A'_n$  în poziția  $A''_1 A''_2 A''_3 \dots A''_n$  (în fig. 25, sînt notate numai vîrfurile:  $A''_3$ , coincizînd cu  $A'_3$ , și  $A''_4$  situat pe dreaptă). Continuînd acest proces, după rotația a  $(n-1)$ -a vom aduce poligonul în poziția  $A^{(n-1)}_1 A^{(n-1)}_2 \dots A^{(n-1)}_n$ , în care centrul se va găsi în punctul  $O^{(n-1)}$ , iar latura  $A^{(n-1)}_n A^{(n-1)}_1$  va fi așternută peste dreaptă. Deoarece, în acest caz, vîrfurile  $A_1$  se reîntoarce pe dreaptă, nu este necesar să continuăm mișcarea; se înțelege ușor că segmentul  $A_1 A^{(n-1)}_1$  este egal cu perimetrul poligonului.

Cititorul a observat că poziția fiecărui vîrf este dată prin doi indici: cel de jos arătînd numărul pe care-l avea acest vîrf în poziția inițială, iar cel de sus (la început accente, iar apoi numărul lor închis în paranteze) permițînd să ne dăm seama de numărul rotațiilor efectuate; de exemplu, prin simbolul  $A^{(4)}_6$  se notează poziția vârfului  $A_6$ , după rotația a patra. În fig. 25, se pot observa, o dată cu proprietățile esențiale ale mișcării descrise, și unele întîmplătoare, în legătură cu valoarea aleasă pentru  $n$ ; recomandăm cititorului să execute figura pentru un alt caz, cînd numărul laturilor este impar, de exemplu pentru  $n = 5$ .

Revenind la sofismul de care ne ocupăm, să luăm acum în locul a două cercuri concentrice, două poligoane regulate cu  $n$





(ultima, ca și în fig. 24, corespunde unei rotații complete a cercului care se rostogolește) se reprezintă sub forma „buclei de cicloidă”  $MM^*$ . Cu mijloacele matematicilor superioare, se poate stabili că lungimea acestei bucle este exact de 8 ori mai mare decât raza cercului care se rostogolește, iar aria cuprinsă între buclă și dreapta  $MM^*$  este egală cu întregul ariei cercului. Problema constă în a obține aceste rezultate pe cale elementară. Pentru aceasta, se propune înlocuirea cercului de rază  $R$  care se rostogolește, printr-un poligon regulat cu  $n$  laturi, înscris în el.

Cu notațiile din fig. 25, traiectoria punctului  $A_1$  se va compune din arce de cerc (în număr de  $n - 1$ ; în fig. 25, aceste arce nu sînt reprezentate):

$\overbrace{A_1 A_1'}^{(1)}$  cu centrul  $A_2$ ,  $\overbrace{A_1' A_1''}^{(2)}$  cu centrul  $A_3$ , ...,  $\overbrace{A_1^{(n-2)} A_1^{(n-1)}}^{(n-1)}$  cu centrul  $A_n^{(n-2)}$ . În ansamblul lor, aceste arce de cerc formează o curbă care merge de la  $A_1$  pînă la  $A_1^{(n-1)}$ , asemănătoare cu cicloida, dar diferind de ea prin existența unor „puncte de frîngere” (în locul în care se unesc arcele consecutive). Pe măsură ce  $n$  crește, unghiurile formate devin tot mai obtuze, iar curba compusă din arcele de cerc se apropie de o buclă de cicloidă. Ne putem aștepta că aceasta din urmă să fie limita celei dintîi, pentru  $n \rightarrow \infty$ . Dar, cu ajutorul trigonometriei elementare, se poate găsi cu ușurință, pentru orice  $n$ , lungimea traiectoriei descrise la o rotație completă de un vîrf al poligonului, aceasta fiind formată din arce de cerc, precum și aria cuprinsă între această traiectorie și dreapta  $A_1 A_1^{(n-1)}$ . Dacă, în expresiile obținute pentru lungime și arie, trecem la limită pentru  $n \rightarrow \infty$ , obținem respectiv  $8R$  și  $3\pi R^2$ , adică rezultatele corecte<sup>1)</sup>. Dar aceste raționamente vor putea fi considerate ca o stabilire a formulelor pentru lungimea și aria cicloidei, în adevăratul înțeles al cuvîntului, numai după ce se va justifica trecerea la limită, adică se va demonstra că pentru  $n \rightarrow \infty$ , lungimea și aria obținute pentru poligonul cu  $n$  laturi care se rostogolește au ca

<sup>1)</sup> În varianta soluției, pe care a dat-o autorul, în afară de formulele cunoscute din trigonometria învățată în școală, mai intervin următoarele:

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin k\alpha = \frac{\sin k \frac{\alpha}{2} \sin (k+1) \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \dots + \sin^2 k\alpha = \frac{2k+1}{4} - \frac{\sin (2k+1) \alpha}{4 \sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} 2 [\sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \sin 3\alpha + \dots + \sin (k-1) \alpha \sin k\alpha] = \\ = k \cos \alpha - \frac{\sin 2k\alpha}{2 \sin \alpha} \end{aligned}$$

(cititorul poate verifica ușor aceste identități, folosind de exemplu inducția completă);

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega}{\omega} = 1 \quad (\omega \text{ este măsurat în radiani})$$

(această formulă se poate găsi în multe manuale de trigonometrie).



limită respectiv lungimea și aria căutată. Probabil că rezultatul se poate obține rămânând în cadrul matematicii elementare, dar este, fără îndoială, foarte greu.

Problema admite o generalizare: în cazul unui cerc care se rostogolește, se consideră și traiectoriile punctelor situate în interiorul și în exteriorul cercului și solidar legate cu el; se ajunge la așa numitele cicloide „alungite” și „scurtate”. Putem încerca să studiem și aceste curbe, înlocuind cercul care se rostogolește printr-un poligon regulat înscris în el și trecând apoi la limită.

**Exemplul 12.** *Lungimea ipotenuzei este egală cu suma lungimilor catetelor.*

În triunghiul dreptunghic  $ABC$  (fig. 27;  $C = 90^\circ$ ), coborim din mijlocul  $D$  al ipotenuzei perpendicularele  $DE$  și  $DF$  pe catete; se obține o linie frântă  $BEDFA$ , formată din patru segmente, a cărei lungime este, evident, egală cu suma lungimilor catetelor. Repetăm aceeași construcție pentru fiecare dintre triunghiurile  $DBE$  și  $ADF$ : din mijloacele ipotenuzelor  $DB$  și  $AD$ , coborim perpendiculare pe catete; obținem o linie frântă formată din opt segmente, cu lungimea precedentă. Procesul se poate continua la infinit: ipotenuza va fi împărțită succesiv în 2, 4, 8, 16, ... părți egale; se va forma un șir de linii frânte, în formă de ferăstrău — pentru prescurtare le vom numi pur și simplu „ferăstraie” — unind punctul  $A$  cu  $B$  și constând respectiv din 2, 4, 8, 16, ... „dintți” (adică 4, 8, 16, 32, ... segmente). Toate „ferăstraiele” au aceeași lungime (adică aceeași sumă a segmentelor care le compun), egală cu suma lungimilor catetelor. O dată cu creșterea numărului de segmente, „ferăstrăul” se apropie tot mai mult de ipotenuza  $AB$ , așa încât, pentru valori foarte mari ale acestui număr, va fi greu să deosebim, practic vorbind, linia frântă cu segmente foarte mici de segmentul de dreaptă (la fel cum este greu să deosebim de cerc poligonul cu un număr foarte mare de laturi înscris în el).

Această reprezentare intuitivă o vom pune la baza enunțului precis: șirul de „ferăstraie” are ca limită segmentul  $AB$ , în sensul că cea mai mare dintre distanțele de la punctele „ferăstrăului” la dreaptă tinde către zero, o dată cu creșterea numărului de ordine al „ferăstrăului” (în adevăr, această distanță maximă nu este decât înălțimea corespunzătoare ipotenuzei a unui, indiferent care, dintre triunghiurile dreptunghice egale, care formează „dintții ferăstrăului”, iar înălțimea unui „dinte” este mai mică decât ipotenuza lui, care tinde către zero). Cu alte cuvinte, dacă fixăm o bandă (oricât de îngustă), cuprinsă între ipotenuza  $B$  și o paralelă la ea care taie catetele (fig. 27), în șirul „ferăstraielelor” se găsește unul care este situat în întregime, împreună

cu toate cele următoare, în interiorul acestei bande (v. nota de la p. 41). Dar toate „ferăstraiele“ au aceeași lungime, deci, șirul lungimilor lor este format din numere egale și are ca limită același număr, egal cu suma lungimilor catetelor. Pe de altă parte, limita „ferăstrăului“ este ipotenuza, a cărei lungime trebuie, de asemenea, să fie limita șirului lungimilor „ferăstraielelor“, dar un șir nu poate avea două limite diferite; cu aceasta, afirmația noastră este demonstrată.

**O b s e r v a Ț i a 1.** Nu este esențial că am luat un triunghi dreptunghic  $ABC$  (singurul lui avantaj constă în faptul că laturile lui au denumiri consacrate). În cazul unui triunghi ascuțitunghii, s-ar putea construi șirul „ferăstraielelor“ ducând, prin punctele de diviziune ale unei laturi, paralele la celelalte două laturi. De asemenea, nu este esențial că am împărțit latura în 2, 4, 8, ... părți egale; am fi putut s-o împărțim în 2, 3, 4, 5, ... și chiar în părți inegale, cu singura condiție ca numărul lor să crească nemărginit, iar diviziunea maximă să tindă către zero.

**O b s e r v a Ț i a 2.** Cititorul va încerca, poate, să caute originea erorii în faptul că lungimea „ferăstrăului“ rămâne neschimbată, deci nu s-ar putea vorbi despre limita ei. La aceasta, facem obiecția că matematica ia în considerare și șiruri care constă din numere egale; acest număr va fi chiar limita șirului, conform sensului exact al noțiunii de „limită“. De altfel, am fi putut cu ușurință să modificăm construcția făcută, astfel încât lungimea „ferăstrăului“ să devină variabilă, dar tot restul să-și păstreze valabilitatea. Ar fi fost suficient, de exemplu, să rupem din fiecare „ferăstrău“ unul dintre dinți, să zicem primul, începând de la punctul  $A$ ; mai exact, să înlocuim primele două segmente prin segmentul de ipotenuză începând în  $A$  (în urma cărui fapt, numărul segmentelor fiecărui „ferăstrău“ se micșorează cu o unitate).

Ca și înainte, „ferăstrăul știrbit“ va avea ca limită segmentul  $AB$ , iar lungimea lui, diferind de suma lungimilor catetelor  $AC + BC$  cu un „infiniț mic“, va tinde către aceeași sumă ca limită.

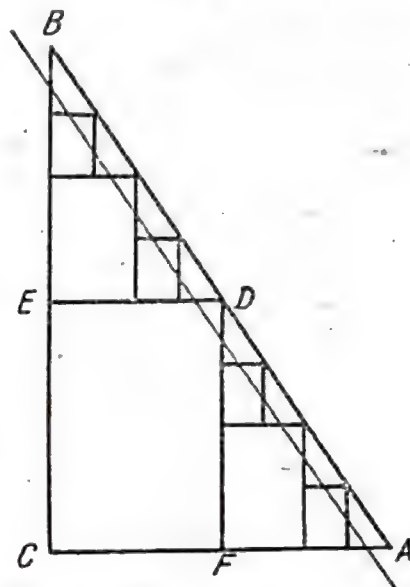


Fig. 27



**Exemplul 13.** Numărul  $\pi$  este egal cu 2.

Să construim un semicerc pe segmentul  $AB$  ca diametru (fig. 28); să împărțim apoi în jumătate segmentul  $AB$  și să construim pe fiecare jumătate ca diametru câte un semicerc, așezîn-

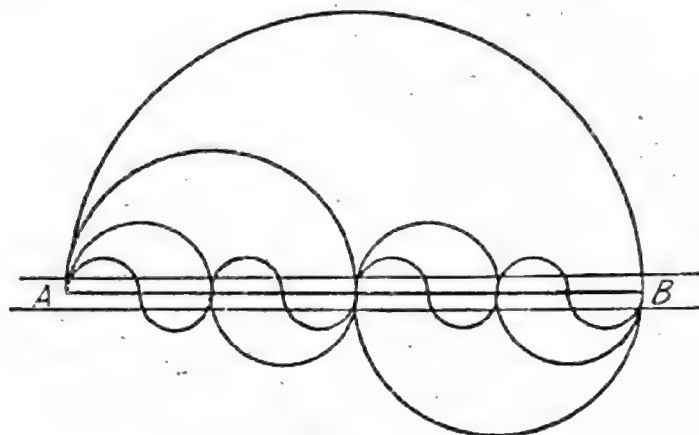


Fig. 28

du-le de ambele părți ale lui  $AB$ . Aceste două semicercuri formează o linie ondulată (amintind prin aspectul ei exterior o sinusoidă), a cărei lungime de la  $A$  la  $B$  este egală cu lungimea semicercului inițial, adică  $\frac{\pi}{2} AB$ ; în adevăr, fiecare dintre semicercurile mai mici este de două ori mai scurt decât cel mare, ca avînd un diametru de două ori mai mic. Să împărțim acum segmentul  $AB$  în patru părți egale și să construim linia ondulată, constînd din patru semicercuri (fig. 28), cu aceeași sumă a lungimilor  $\frac{\pi}{2} AB$ . Vom prelungi acest proces nemărginit, împărțind segmentul  $AB$  în 8, 16, ... părți egale și construind pe ele semicercuri situate alternativ de o parte și de cealaltă a dreptei  $AB$ . Se obține un șir de linii ondulate, care se apropie din ce în ce mai mult de segmentul  $AB$  și care au ca limită acest segment, în sensul că distanța maximă a punctelor fiecărei linii ondulate la dreapta  $AB$  (această distanță maximă este egală, evident, cu raza semicercurilor care formează linia) tinde către zero, pe măsură ce ne îndepărtăm de originea șirului (în fig. 28, se reprezintă o bandă cuprinsă între două paralele la  $AB$ ; oricît de îngustă ar fi această bandă, există un moment, în șirul nostru, începînd de la care toate liniile ondulate sînt cuprinse, pe toată lungimea lor de la  $A$  pînă la  $B$ , în interiorul bandei). Dar lungimea tuturor liniilor ondulate este aceeași, anume  $\frac{\pi}{2} AB$ ;

aceeași trebuie să fie lungimea limitei acestor linii, adică a segmentului  $AB$ . Din egalitatea  $\frac{\pi}{2} AB = AB$ , obținem  $\pi = 2$ .

**Observație.** Acest exemplu se poate completa prin considerații analoge observațiilor 1 și 2 de la exemplul 12: nu joacă un rol esențial nici modul de împărțire a segmentului  $AB$ , nici faptul că lungimea liniei ondulate rămâne constantă. Ca și în exemplul precedent, s-ar putea înlocui de fiecare dată unul dintre semicercurile care formează linia ondulată prindiametrul lui și atunci lungimea acestei linii ar deveni variabilă. Propunem cititorului să studieze alte variante: în locul semicercurilor, adică al segmentelor capabile de un unghi drept, să construiască segmente capabile de un alt unghi oarecare (constant sau variind după o lege anumită, în funcție de numărul de diviziuni, fără însă să tindă către  $180^\circ$ ); atunci pentru numărul  $\pi$  se vor obține alte valori.

#### Exemplul 14. „Cilindrul lui Schwarz“.

Cînd se urmărește să se măsoare un arc de curbă  $AB$  (fig. 29 stînga), se procedează aproape la fel ca în cazul măsurării cercului sau a părților lui: se înscriu în acest arc linii frînte (în acest caz, nu neapărat regulate, pentru că într-un arc oarecare aceasta se poate face numai în mod întîmplător) și se construiește un șir infinit de astfel de linii frînte, apropiindu-se nemărginit virfurile, adică avînd grijă ca lungimea celui mai mare segment al liniei frînte să tindă către zero pe măsură ce ne îndepărtăm de originea șirului. Șirul lungimilor acestor linii frînte va avea ca limită tocmai lungimea arcului măsurat.

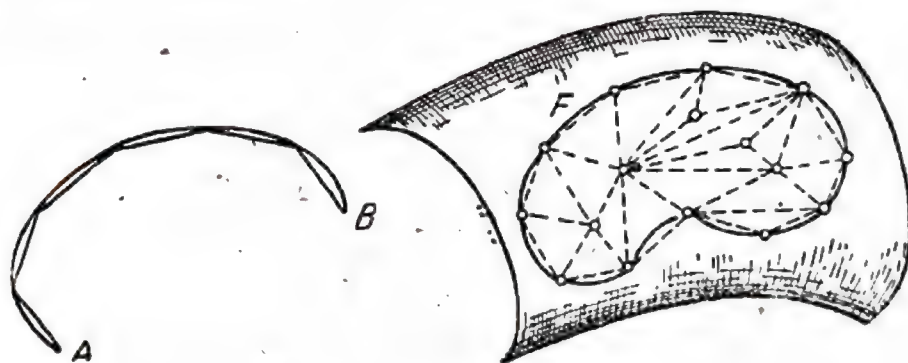


Fig. 29

Trecînd la un număr de dimensiuni cu o unitate mai mare, ajungem la o problemă înrudită: să se găsească măsura (aria) unei figuri  $F$ , situată pe o suprafață curbă (fig. 29, dreapta).



Făcînd analogia cu arcul, pare natural să procedăm astfel: să înscrîm în figura dată suprafețe poliedrice<sup>1)</sup> cu fețele tot mai mici; aria figurii  $F$  va fi limita ariei suprafeței poliedrice variabile (adică a sumei ariilor fețelor ei). Aceasta necesită, desigur, o precizare: în interiorul figurii  $F$  și pe frontiera ei, vom lua o mulțime de puncte și le vom uni cîte trei prin plane, astfel încît să se formeze o suprafață poliedrică cu fețe triunghiulare și astfel ca două dintre ele să nu aibă puncte interioare comune, iar trei dintre ele, o muchie comună. Să construim un șir infinit de suprafețe poliedrice  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ , înscrise în figura  $F$ , astfel încît lungimea celei mai mari muchii (adică cea mai mare din toate laturile tuturor fețelor triunghiulare) a suprafeței  $F_n$  să tindă către zero, pentru  $n \rightarrow \infty$ , și ca fiecare punct al figurii  $F$  să fie limita unui anumit șir de puncte luate respectiv pe  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$  (putem face astfel încît frontiera suprafeței poliedrice să fie întotdeauna înscrisă în frontiera figurii  $F$ , v. fig. 29). Pare aproape evident că șirul ariilor suprafețelor poliedrice  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ , are o limită, anume aria figurii  $F$ . Aici intră în joc, ca și în exemplele precedente aceleași reprezentări de „imposibilitate practică de a distinge“ o suprafață curbă de cea poliedrică înscrisă în ea, atunci cînd fețele acesteia din urmă sînt foarte mici. Dar, la sfîrșitul secolului trecut, matematicianul german G.A. Schwarz a arătat, cu ajutorul unui exemplu simplu, că aici evidența ne înșală; trecem la expunerea acestui exemplu.

Să considerăm un cilindru circular drept de rază  $R$  și înălțime  $H$  (fig. 30); vom căuta aria suprafeței lui laterale, prin metoda expusă mai sus. În acest scop, vom împărți înălțimea în  $n$  părți egale și vom duce prin punctele de intersecție plane perpendiculare pe generatoare; la intersecția cu suprafața laterală a cilindrului, obținem  $n-1$  cercuri care, împreună cu bazele, împart această suprafață în  $n$  zone cilindrice egale. Într-unul dintre cercuri, înscrîm un poligon regulat cu  $m$  laturi și ducem prin vîrfurile lui generatoarele, care împart fiecare din celelalte cercuri în cîte  $m$  părți egale; să considerăm punctele de diviziune ca vîrfuri ale unor poligoane regulate înscrise în aceste cercuri. Segmentele generatoarelor astfel trasate formează, împreună cu laturile poligoanelor înscrise,  $mn$  dreptunghiuri egale (unul dintre ele  $MNPQ$  este desenat în fig. 30), cu vîrfurile pe suprafața cilindrului. Rămîne să mai împărțim fiecare dreptunghi în două triunghiuri, printr-o diagonală, pentru a obține o suprafață poliedrică în-

<sup>1)</sup> O suprafață poliedrică se consideră înscrisă într-o suprafață curbă, dacă toate vîrfurile celei dintîi se află pe cea de-a doua.

serisă în suprafața laterală a cilindrului și formată din  $2mn$  fețe triunghiulare (egale). Când numerele  $m$  și  $n$  cresc nemărginit, laturile acestor fețe triunghiulare tind către zero, ca și distanțele tuturor punctelor lor la suprafața laterală a cilindrului)<sup>1</sup>.

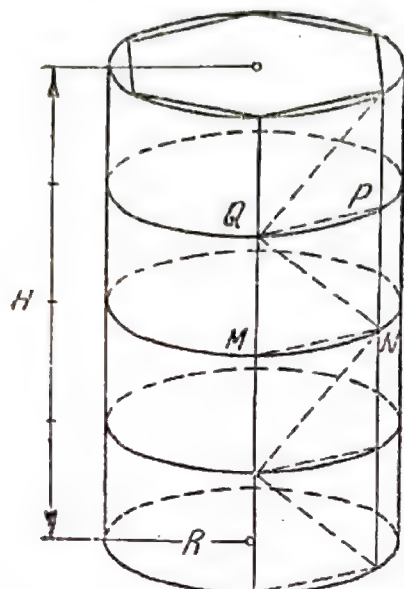


Fig. 30

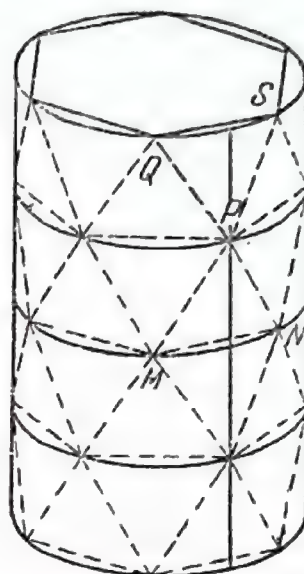


Fig. 31

Fiecare dintre poliedrele înscrise amintite este determinat prin valorile celor doi indici  $n$  și  $m$ , dar șirul de poliedre se poate separa într-o infinitate de moduri, făcând unul dintre indici funcție de celălalt (bineînțeles, astfel încît amîndoi indicii să ia valori naturale, tînzînd în același timp către infinit), spre exemplu punînd  $m = n$ , sau  $n = 3m$ , sau  $m = n^2$  etc. Cititorul a observat probabil, că suprafețele noastre poliedrice coincid, în fond, cu suprafețele laterale ale prismelor regulate cu  $m$  fețe, înscrise în cilindru, deci împărțirea fiecărei fețe dreptunghiulare a unei astfel de prisme în  $2n$  triunghiuri a avut numai scopul de a încadra modul de înscriere în schema generală reprezentată în fig. 29. Așadar, avem de a face cu o variantă întrucîtva complicată pentru stabilirea curentă a formulei care dă aria laterală a cilindrului ( $S_{lat. cil.} = 2\pi RH$ ) prin înscrierea de prisme regulate, cu o trecere apoi la limită. Pînă în prezent, raționamentele noastre nu conțin nimic sofistic.

Acum vom schimba întrucîtva modul de înscriere a suprafeței poliedrice. Ca și înainte, vom împărți înălțimea  $H$  în  $n$  seg-

<sup>1</sup>) Distanța unui punct oarecare la suprafața laterală a cilindrului se măsoară prin diferența dintre raza lui și distanța de la acest punct la axa cilindrului.



mente egale, vom duce cele  $n-1$  secțiuni circulare, care, împreună cu bazele cilindrului, dau  $n+1$  cercuri; vom înscrie în fiecare dintre ele câte un poligon regulat, cu  $m$  laturi, dar vom așeza astfel vîrfurile lor și anume, astfel ca generatoarea dusă prin orice vîrf al poligonului înscris într-un cerc oarecare să împartă în jumătate arcul subîntins de latura poligonului înscris în cercul vecin (de exemplu, în fig. 31, generatoarea care trece prin  $P$  împarte în jumătate arcele  $MN$  și  $QS$ ; dreptele  $QM$  și  $SN$ , care nu au fost trasate pe figură, sînt generatoare). Cu alte cuvinte în timp ce, în cazul precedent, poligonul înscris într-un cerc oarecare se obținea din poligonul înscris în cercul vecin printr-o simplă translație după direcția generatoarei cu distanța  $\frac{H}{n}$ , acum la

această translație se mai adaugă o rotație în jurul centrului poligonului, egală cu jumătate din unghiul lui la centru, adică cu  $\frac{\pi}{m}$ . Așezînd în acest mod poligoanele regulate înscrise, con-

struim o suprafață poliedrică (neconvexă!), formată din fețe triunghiulare, unind fiecare vîrf cu cele două vîrfuri, cele mai apropiate, situate pe cercul vecin. Această suprafață poliedrică (al cărei aspect amintește un lampion pliant de hîrtie, desfăcut), constînd din  $2mn$  triunghiuri isoscele egale (cîte  $2m$  în fiecare dintre cele  $n$  zone), este înscrisă în suprafața curbă a cilindrului, în adevăratul sens al acestui cuvînt (v. nota de la pag. 46).

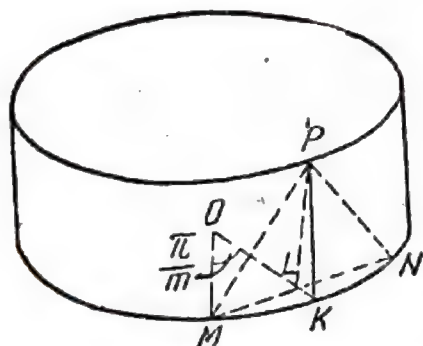


Fig. 32

Avînd în vedere că vrem să găsim aria suprafeței poliedrice, ne vom ocupa de una dintre fețele ei egale  $MNP$ , reprezentată în fig. 31 și, separat, în fig. 32, unde  $MN$  este latura poligonului regulat cu  $m$  laturi, înscris în secțiunea circulară de centru  $O$ ; punctele  $K$  și  $L$  sînt respectiv mijloacele arcului  $MN$  și coardei  $MN$ ;  $PK$  este un segment de generatoare. Triunghiul  $MNP$  este isoscel ( $PM = PN$ , deoarece aceste segmente au proiecții egale  $KM$  și  $KN$  pe planul cercului  $O$ ); vom afla înălțimea sa  $PL$  din triunghiul  $PKL$ , unde  $K = 90^\circ$ ,

$$PK = \frac{H}{n}, \quad KL = R - OL = R - R \cos \frac{\pi}{m} = 2R \sin^2 \frac{\pi}{2m}$$

de unde

$$PL = \sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^2 + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}.$$

Și, deoarece  $\frac{1}{2} MN = R \sin \frac{\pi}{m}$ , avem

$$\text{aria } MNP = R \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{H^2}{n^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}.$$

Dacă notăm cu  $S_{m,n}$  aria întregii suprafețe poliedrice care se obține prin împărțirea cercului în  $m$  părți și a înălțimii în  $n$  părți, obținem

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= 2mn R \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{H^2}{n^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} = \\ &= 2mR \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{H^2 + 4n^2 R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}. \end{aligned}$$

Cum am observat și într-un alt caz, din ansamblul numerelor  $S_{m,n}$  se poate extrage — într-o infinitate de moduri — un șir, stabilind o dependență între indicii  $m$  și  $n$ ; vom considera două variante de acest fel.

a)  $n = m^2$ , adică împărțind cercul succesiv în 3, 4, 5, ... părți, vom împărți înălțimea respectiv în 9, 16, 25, ... părți. Este cazul să notăm acum aria suprafeței poliedrice prin  $S_m$ , deoarece ea nu mai depinde decât de indicele  $m$ ; ea este dată de formula

$$S_m = 2mR \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{H^2 + 4m^4 R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}.$$

Urmează acum să efectuăm trecerea la limită pentru  $m \rightarrow \infty$ , pentru care  $\frac{\pi}{m}$ , deci  $\sin \frac{\pi}{m}$  și  $\sin \frac{\pi}{2m}$  tind către zero. Pentru a putea aplica ultima dintre formulele date în nota de la p. 41, transformăm expresia lui  $S_m$ :

$$S_m = 2\pi R \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{H^2 + \frac{1}{4} \pi^4 R^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} \right)^4},$$

după care găsim:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{1}{4} \pi^4 R^2}.$$



Această limită este în mod evident mai mare decât  $2\pi RH$  — expresia general cunoscută a ariei laterale a cilindrului. S-ar putea obține pentru această limită și alte valori, în particular oricât de mari; de exemplu, punând  $n = km^2$  ( $k$ —număr natural), am avea

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{k^2}{4} \pi^4 R^2}.$$

b)  $n = m^3$ , astfel încât, în comparație cu varianta precedentă numărul de diviziuni ale înălțimii crește și mai repede. În expresia lui  $S_m$ , aceasta duce numai la apariția unui factor suplimentar  $m^2$  în al doilea termen al sumei de sub radical. Datorită acestui fapt, termenul considerat și, o dată cu el,  $S_m$  vor tinde către infinit, pentru  $m \rightarrow \infty$ . Aceasta înseamnă că se poate stabili o lege de înscriere a suprafețelor poliedrice, astfel încât ariile lor, crescând nemărginit, să nu tindă către nici o limită. Rezultă că suprafața laterală a cilindrului nu are arie.

Am ajuns la absurdități evidente și trebuie acum să căutăm eroarea.

**Exemplul 15.** Aria sferei de rază  $R$  este egală cu  $\pi^2 R^2$ . Să considerăm emisfera (fig. 33) cu centrul  $O$ , „ecuatorul”  $q$  și „polul”  $P$

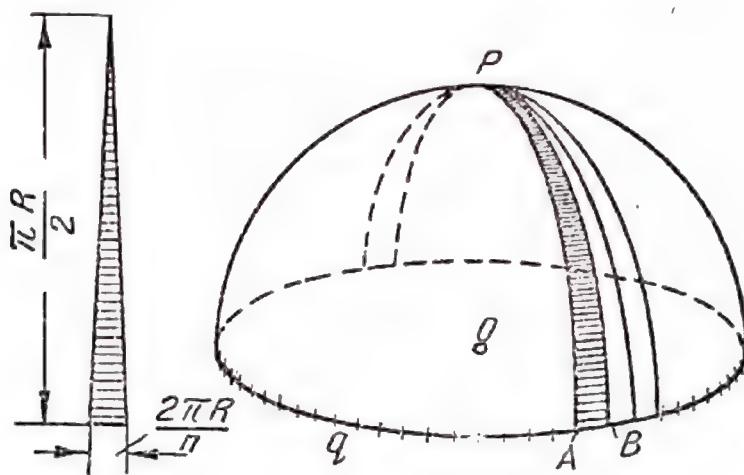


Fig. 33

(aceasta înseamnă că raza  $OP$  este perpendiculară pe planul ecuatorului  $q$ , în punctul  $O$ ). Să împărțim cercul  $q$  într-un număr foarte mare  $n$  de părți egale și să unim  $P$  cu toate punctele de diviziune, prin arce de cerc mare (fiecare arc este  $\frac{1}{n}$  din „meridian”); prin

aceasta, emisfera va fi împărțită în  $n$  triunghiuri sferice foarte înguste, fiecare dintre ele mărginit de un mic arc al ecuatorului și de două arce de meridian (câteva triunghiuri de acest fel sînt reprezentate în figură; unul dintre ele  $PAB$  este hașurat). Făcînd să crească nemărginit numărul  $n$  de diviziuni, aceste triunghiuri sferice pot fi făcute oricît de înguste („mai subțiri decît firul de păianjen“) iar triunghiul curbat „infinît de îngust“ se poate aplatiza, sau, cum se spune, „desfășura“ în plan, păstrînd toate dimensiunile (adică lungimile, unghiurile, aria). Se obține un triunghi plan (isoscel), avînd drept bază arcul rectificat de lungime,  $\frac{2\pi R}{n}$ , iar ca înălțime, un arc rectificat egal cu un sfert de cerc, adică de lungime  $\frac{\pi R}{2}$  (v. triunghiul hașurat din fig. 33, stînga).

Aria acestui triunghi este  $\frac{1}{2} \frac{2\pi R}{n} \frac{\pi R}{2} = \frac{1}{2n} \pi^2 R^2$ , prin urmare aria totală a tuturor celor  $n$  triunghiuri care acoperă emisfera este egală cu  $\frac{1}{2} \pi^2 R^2$ , iar aria întregii sfere este  $\pi^2 R^2$ .

Aceasta este în contradicție cu formula cunoscută, conform căreia aria sferei este egală cu  $4\pi R^2$  (căci  $\pi \neq 4$ ).

#### CAPITOLUL IV

#### ANALIZA EXEMPLELOR TRATATE ÎN CAPITOLUL III

**La exemplul 11.** În forma lui clasică, acest sofism ține de fapt nu de geometrie, ci de mecanică (mai exact, de cinematică, adică de știința mișcării), întrucît este vorba de o roată, care se mișcă într-un mod special. Pe de altă parte, se poate vedea dinainte că, la un studiu mai atent, substratul cinematic se va dovedi pur exterior, deoarece aici timpul nu joacă un rol esențial (de exemplu, este indiferent dacă roata se învîrtește repede sau încet); întregul sofism poate fi expus în limbaj geometric, ceea ce se și face ceva mai jos.

Indiscutabil, partea slabă a raționamentelor noastre este caracterul vag al expresiei „*cercul se rostogolește* (fără alunecare) *pe o dreaptă*“. Ajunge să convenim asupra sensului exact al acestei expresii pentru ca să devină clar imediat că, dacă în acest sens, unul dintre cercurile solidar legate se rostogolește, celălalt nu se rostogolește și demonstrația sofistică nu mai este valabilă.



Vom vorbi, la început, în limbaj cinematic. „Cercul se rostogolește fără alunecare pe dreaptă” înseamnă: cercul se mișcă astfel încît, în orice moment, el este tangent la dreaptă, punctul de pe cerc în care are loc tangența avînd, în acest moment, viteza nulă. Cu alte cuvinte, punctul cercului care se găsește, la momentul dat, „jos”, adică coincide cu punctul de tangență, servește drept „centru instantaneu de rotație” pentru cercul care se rostogolește. Acest din urmă lucru înseamnă că viteza oricărui punct legat de cerc (nu este neapărat nevoie ca acest punct să se afle pe cerc) este, în fiecare moment, aceea pe care ar avea-o dacă, în acel moment, cercul s-ar roti în jurul punctului său de tangență. În particular, direcția acestei viteze este perpendiculară pe dreapta care unește punctul dat cu punctul de tangență; cu notațiile din fig. 24, viteza punctului care a ajuns în poziția  $M'$  este orientată după perpendiculara la dreapta  $M'P$  (așadar, pentru cicloida din fig. 26, normala în punctul  $M'$  este dreapta  $M'P$ ).

Dimpotrivă, dacă punctul de pe cerc care, la momentul dat, se află „jos” are o viteză diferită de zero, se spune că mișcarea are loc „cu alunecare pozitivă”, cînd această viteză este orientată în sensul mișcării, sau „cu alunecare negativă”, cînd este orientată în partea opusă. Numai în cazul în care alunecarea lipsește, se poate afirma că drumul parcurs pe dreaptă, în orice interval de timp, este egal cu lungimea arcului de cerc, care corespunde unghiului la centru cu care s-a rotit, în acest interval, o rază oarecare a cercului; de exemplu, în fig. 24 și 26,  $MP = \widehat{PM'}$ ; în particular,  $MM^*$  este egal ca lungime cu întregul cerc care se rostogolește. În cazul unei alunecări pozitive,  $MP > \widehat{PM'}$ , iar în cazul unei alunecări negative,  $MP < \widehat{PM'}$ .

Acum sîntem în măsură să descriem pur geometric diferitele moduri de rostogolire, deși uneori, pentru a da o imagine mai intuitivă, vom păstra limbajul cinematic. Să considerăm (fig. 24 și 26) segmentul  $MM^* = 2\pi R$  și să construim, în fiecare punct  $P$  al lui, cercul tangent cu centrul  $O'$ , situat de o parte determinată a lui  $MM^*$  și avînd raza  $R$ ; să așternem pe acest cerc arcul  $\widehat{PM'}$ , egal în lungime cu segmentul  $PM$  și avînd același sens cu el, în punctul  $P^1$ ). Dacă efectuăm această construcție pentru toate pozițiile posibile ale punctului  $P$  pe segmentul  $MM^*$ , spu-

<sup>1)</sup> Aceasta înseamnă că arcul  $\widehat{PM'}$  (iar dacă acesta este mai mare decît un semicerc, partea de arc adiacentă lui  $P$ ) și segmentul  $PM$  se află de aceeași parte a diametrului  $PO'$  (în cazul altei curbe care se rostogolește, am spune: de o aceeași parte a normalei).

nem (revenind numai la limbajul cinematic, dar rămânând în fond, în domeniul geometric) că ansamblul tuturor cercurilor tangente s-a obținut în urma unei rotații a cercului de rază  $R$ , care se rostogolește fără alunecare pe dreapta  $MN$ , iar locul geometric al punctelor  $M'$ , corespunzând diferitelor poziții ale punctului  $P$ , îl vom numi traiectoria punctului  $M$ . Dacă, în construcția precedentă, am înlocui egalitatea  $MP = \widehat{PM'}$  prin proporționalitatea  $MP = k \widehat{PM'}$  ( $k$  este un factor constant, diferit de 1), am spune că cercul se rostogolește „cu alunecare constantă de coeficient  $k$ ”, alunecarea fiind pozitivă sau negativă, după cum este pozitivă sau negativă diferența  $k-1$ .

Înarmați cu aceste definiții exacte, să revenim la roata lui Aristotel. Din punct de vedere cinematic, dacă cel mai mare dintre cercurile concentrice, reprezentate în fig. 24, se rostogolește fără alunecare pe dreapta  $MN$ , cu siguranță că cel mai mic nu se rostogolește la fel pe dreapta  $M_1N_1$ . În adevăr, dacă și cercul mic s-ar rostogoli fără alunecare, în momentul în care centrul comun al cercurilor se găsește în  $O'$ , figura în mișcare ar avea, în același timp, două centre instantanee de rotație,  $P$  și  $P_1$  (și atunci viteza punctului  $M'$  ar fi orientată perpendicular atât pe  $PM'$ , cât și pe  $P_1M'$ , ceea ce este imposibil). Mai mult, se poate spune că cercul mai mic se rostogolește cu alunecare pozitivă, deoarece întotdeauna  $M_1P_1 = MP = \widehat{PM'}$  și deci,  $M_1P_1 > \widehat{P_1M'_1}$ . Invers, dacă am face cercul mic să se rostogolească fără alunecare de-a lungul dreptei  $M_1N_1$  cercul mare, antrenat de el, s-ar rostogoli cu alunecare negativă.

La aceleași concluzii ajungem pornind de la definițiile geometrice: dacă cercul mare din fig. 24 „se rostogolește” astfel încît, în orice poziție a lui, să avem  $MP = \widehat{PM'}$ , atunci, pentru cercul mai mic,  $M_1P_1 > \widehat{P_1M'_1} = \frac{R}{r} \widehat{P_1M'_1}$ , unde  $R$  și  $r$  sînt razele cercului mare și cercului mic. Așadar, cercul mai mic se rostogolește cu alunecare pozitivă de coeficient  $\frac{R}{r} (>1)$ . Invers dacă cercul mai mic se rostogolește fără alunecare, cercul cel mare se rostogolește cu alunecare negativă de coeficient  $\frac{r}{R} (<1)$ .

*La indicația de la pag. 38. Să considerăm două poligoane cu  $n$  laturi concentrice și omotetice,  $A_1A_2...A_n$  și  $a_1a_2...a_n$ , cu centrul  $O$  (fig. 34, unde  $n = 8$ , iar pentru poligonul mai mare s-au păstrat notațiile din fig. 25). Să presupunem că poligonul mare se*



rostogolește așa cum s-a arătat la pag. 39; mai întâi, vârful  $A_2$  rămâne fix, ca centru de rotație, pînă cînd poligonul se rotește cu unghiul  $\frac{2\pi}{n}$  (pentru a face comparație, reamintim că, la rostogolirea cercului, punctul lui de „jos” era de asemenea centru de rotație, dar numai instantaneu). În urma unei astfel de rotații, poligonul mare se va așeza pe dreaptă cu latura  $A_2A_3$ , a cărei

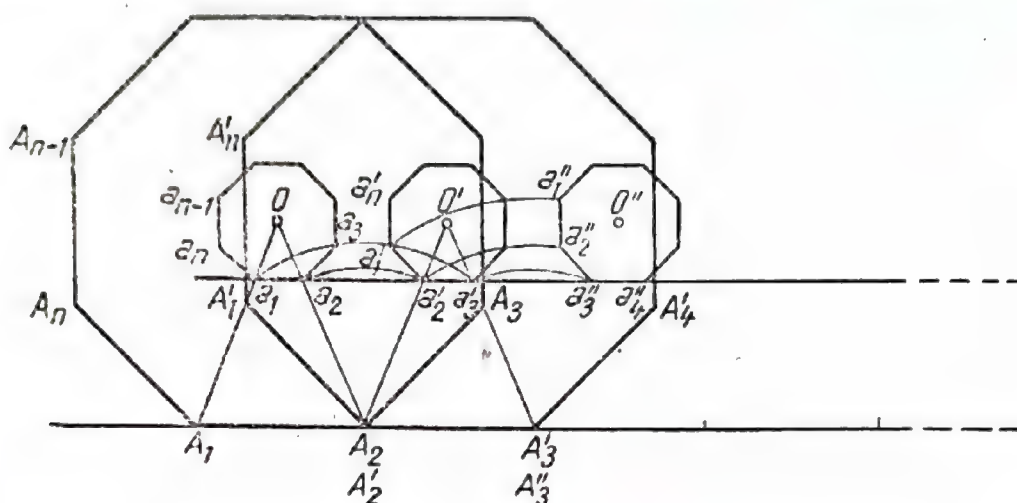


Fig. 34

nouă poziție notată cu  $A'_2A'_3$ , este în prelungirea laturii  $A_1A_2$ ; datorită acestui fapt, pe măsură ce poligonul se rostogolește, perimetrul lui se „desfășoară” pe dreaptă.

În mod cu totul diferit se va mișca însă poligonul mai mic solidar legat de cel mare: el se va roti tot în jurul centrului  $A_2$ , cu unghiul  $\frac{2\pi}{n}$ , în urma cărui fapt latura  $a_2a_3$  va ocupa poziția

$a'_2a'_3$ , care însă nu constituie o prelungire a segmentului  $a_1a_2$ . Spre deosebire de poligonul  $A_1A_2...A_n$  care „se mută” de pe o latură pe alta, poligonul  $a_1a_2...a_n$  „se mută” și, totodată „sare” dintr-o poziție în alta (în fig. 34, se arată două poziții succesive ale poligonului mare și trei poziții ale celui mic; se figurează, de asemenea, buclele inițiale ale traiectoriilor  $a_1, a_2, a_3$ ; fiecare dintre părțile de traiectorie figurate este formată din două arce de cerc avînd ca măsură în radiani  $\frac{2\pi}{n}$ ; de exemplu, pentru vâr-

ful  $a_2$  acestea sînt arcul  $\widehat{a_2a'_2}$ , cu centrul  $A_2$ , și arcul  $\widehat{a'_2a''_2}$ , cu centrul  $A'_3$ ; ca și în cazul din fig. 25, propunem cititorului

să nu dea atenție unor particularități ale fig. 34, care își au originea în valoarea particulară  $n = 8$  luate acolo, și să-și construiască o altă figură, de exemplu pentru  $n = 5$ ). Datorită acestor „salturi”, poligonul  $a_1 a_2 \dots a_n$ , deplasându-se de-a lungul dreptei  $a_1 a_1^{(n-1)}$  „acoperă o distanță” mai mare decât perimetrul lui; acesta este modelul aproximativ al „rostogolirii cu alunecare pozitivă”. Propunem cititorului să explice cum s-ar mișca poligonul  $A_1 A_2 \dots A_n$ , dacă am face poligonul  $a_1 a_2 \dots a_n$  să se rostogolească fără alunecare pe o dreaptă: se poate prevedea că, după fiecare rotație cu un unghi  $\frac{2\pi}{n}$ , în jurul unui vîrf al poligonului mic, latura celui mai mare se va suprapune parțial peste latura precedentă a acestui poligon și, în consecință, drumul parcurs la o rotație completă va fi mai mic decât perimetrul; obținem o imagine aproximativă a „rostogolirii cu alunecare negativă”.

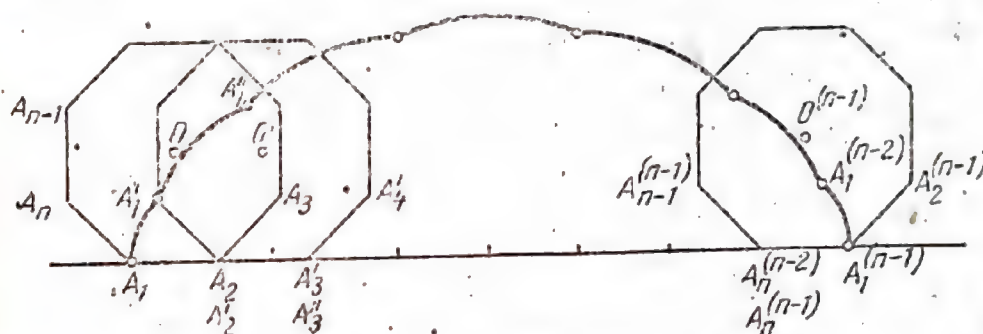


Fig. 35

La problema de la pag. 40. Este suficient să dăm figura și unele rezultate intermediare:

În fig. 35, se reprezintă traiectoria  $A_1 A_1' A_1'' \dots A_1^{(n-1)}$  a vîrfului  $A$  al poligonului care se rostogolește (cazul particular  $n = 8$ ), descrisă mai amănunțit la pag. 40. Lungimea acestei traiectorii formate din arce de cerc este

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{n} 2R \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \\ = \frac{4\pi R}{n} \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

Aria figurii mărginite de această traiectorie și de segmentul  $A_1 A_1^{(n-1)}$  se compune din 1) ariile sectoarelor circulare  $A_2 A_1 A_1'$ ,  $A_3 A_1' A_1''$ , ...,  $A_n A_1^{(n-2)}$



$A_1^{(n-2)} A_1^{(n-1)}$ , fiecare cu unghiul la centru de  $\frac{2\pi}{n}$ ; suma acestor arii este

$$\frac{4\pi R^2}{n} \left( \sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = 2\pi R^2;$$

2) ariile triunghiurilor  $A_1' A_2 A_3', A_1'' A_3' A_4'', \dots, A_1^{(n-2)} A_{n-1}^{(n-3)} A_n^{(n-2)}$  cu suma totală

$$2R^2 \sin \frac{\pi}{n} \left( \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} + \dots \right. \\ \left. \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \sin \frac{(n-2)\pi}{n} \right) = nR^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}.$$

**La exemplul 12.** Eroarea logică se ascunde în ultima frază a demonstrației (cea care precede observația 1) și constă în folosirea echivocă a termenului „limită”. Într-un caz, se consideră un șir de linii („fierăstraiele”, cu un număr variabil de „dinți”), ale căror puncte se apropie nemărginit de o anumită dreaptă. În celălalt caz, este vorba despre un șir de numere (lungimile „ferăstraielelor”), care se apropie nemărginit de un anumit număr determinat (dacă se poate sau nu considera că lungimile ferăstraielelor formează un șir, v. observația 2, p. 43).

*Din faptul că un șir de linii tinde (într-un sens) spre o linie determinată, nu avem nici un motiv să tragem concluzia că șirul lungimilor acestor linii tinde (în celălalt sens) către lungimea acestuia din urmă.*

Să nu ne lăsăm derutați de faptul că, atunci când dinții devin foarte mici, „ferăstrăul” nu poate fi deosebit practic, de un segment de dreaptă; acesta nu este un fapt geometric, ci unul fizic, chiar fiziologic, depinzând de proprietățile vederii noastre (un microscop puternic ar schimba situația). Dar, dacă este vorba de intuiție, sprijinind-o prin raționament, chestiunea stă în felul următor. Este adevărat, că, în fiecare triunghi mic („dinte al ferăstrăului”), diferența dintre suma catetelor și ipotenuză este neînsemnată, dar numărul acestor diferențe este foarte mare, și termenii cei mai mici în număr foarte mare pot, evident, să dea orice sumă. Dacă am vrea să pătrundem mai adânc în esența lucrurilor, am da atenție faptului că dinții „ferăstrăului” se apropie de dreapta  $AB$  în ce privește distanța, dar nicidecum în ce privește direcția: oricât de mici ar fi segmentele liniei frunte,



ele sînt (fig. 27) totdeauna sau orizontale sau verticale, în timp ce ipotenuza  $AB$  este oblică.

**La exemplul 13.** Eroarea este de aceeași natură ca în exemplul precedent. Șirul de linii ondulate se apropie nemărginit de segmentul de dreaptă, dar lungimile lor nu au ca limită lungimea acestui segment. Ca și în cazul precedent, are loc tinderea unei linii către cealaltă în ce privește distanța, dar nu în ce privește direcția: dacă segmentul  $AB$  este orizontal, direcția liniei ondulate — oricît de mici ar fi semicercurile care o compun — oscilează întotdeauna între direcția verticală și cea orizontală.

**La exemplul 14.** Deși situația este cu mult mai complicată decît în cele două exemple precedente, natura logică a sofismului este aceeași: este adevărat că suprafața poliedrică se apropie nemărginit de cea cilindrică, dar de aici nu rezultă de loc că aria suprafeței poliedrice se apropie nemărginit de aria celei cilindrice. Pentru a ne lămurii mai bine legătura între o apropiere și cealaltă, să observăm că, și prin modul de înscriere al suprafeței poliedrice arătat în fig. 31, s-ar putea obține o formulă corectă pentru aria laterală a cilindrului, dacă, spre exemplu, am lua  $n = m$  sau  $n = 10m$ , în general dacă am face ca numărul diviziunilor înălțimii și numărul diviziunilor cercului să varieze proporțional unul cu celălalt. De exemplu, pentru  $n = 10m$ , am avea

$$S_m = 2m R \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{H^2 + 400 m^2 R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}} =$$

$$= 2\pi R \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{H^2 + \frac{25\pi^4 R^2}{m^2} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} \right)^4}$$

și, pentru  $m \rightarrow \infty$ , am obține  $\lim S_m = 2\pi RH = A_{lat. cil.}$  Prin ce se explică faptul că, în cazul legii de înscriere definite prin formula  $n = m^2$ , aria  $S_m$  a suprafeței poliedrice tindea către o limită mai mare decît  $2\pi RH$ , iar pentru  $n = m^3$ , chiar spre infinit? Ne permitem să răspundem, într-un limbaj nematematic, renunțînd la orice pretenții de demonstrație și scoțînd în evidență numai ceea ce este accesibil reprezentării intuitive (și ceea



ce poate, după o prelucrare matematică, să formeze baza unei demonstrații). Dacă  $n = m$  sau  $n = 10m$  etc. desimea diviziunilor pe cerc și pe înălțime crește în același ritm; datorită acestui fapt, suprafața poliedrică, chiar neconvexă, are totuși fețe aproape verticale, dacă se presupune că cilindrul este așezat vertical (propunem cititorului să demonstreze, folosind fig. 32, că fața  $MNP$  face cu planul orizontal  $MKN$  un unghi care tinde către  $\frac{\pi}{2}$  când  $m \rightarrow \infty$ ). Așadar, suprafața poliedrică se apropie de cea cilindrică, nu numai în distanță, ci și în direcție. Alta este situația în cazul  $n = m^2$  sau  $n = m^3$  etc. Acum diviziunile înălțimii se îndesesc într-un ritm mult mai rapid decât diviziunile cercului. În urma acestui fapt, suprafața poliedrică devine sensibil mai „dintată”, în urma cărui fapt rezultă o arie suplimentară. Acum, fețele triunghiulare nu mai tind să devină verticale; se poate arăta că, pentru  $n = m^2$ , unghiul  $PLK$  (fig. 32) se apropie nemărginit de un anumit unghi ascuțit, iar pentru  $n = m^3$ , chiar de zero (adică fața tinde să devină orizontală), când  $m \rightarrow \infty$ .

În încheiere, să examinăm o problemă care se prezintă în mod natural: de unde provine faptul că nu avem analogie între înscrierea liniilor frunte într-o linie curbă și aceea a suprafețelor poliedrice, într-o suprafață curbă? De ce, în primul caz, îndesirea vîrfurilor asigură apropierea liniilor, nu numai în distanță, ci și în direcție, în timp ce, în al doilea caz, apropierea în distanță poate avea loc fără apropiere în direcție? Fără a intra în amănunt, menționăm numai următoarele fapte. Atunci cînd, pe o linie curbă, două puncte dintre care unul este fix, tind să coincidă, dreapta care unește aceste puncte are ca limită tangenta la curbă în punctul fix. Cînd însă, pe o suprafață curbă trei puncte (să presupunem: niciodată situate pe o aceeași dreaptă), dintre care unul este fix, tind să coincidă, planul care unește aceste puncte nu tinde neapărat să devină plan tangent. Pentru a ne convinge de aceasta, ajunge să ne imaginăm că, pe o sferă, am făcut o secțiune circulară oarecare și că, pe acest cerc, am luat un punct fix și alte două puncte care tind către primul; planul acestor trei puncte va fi tot timpul planul secțiunii.

**La exemplul 15.** Avem de-a face cu un abuz de expresii fără sens matematic, ca „un număr foarte mare”, „triunghi foarte îngust”, „arc mic”, „triunghi infinit de îngust”, care își au locul atunci cînd căutăm să descriem intuitiv o figură geometrică (acest mod de descriere s-a folosit de multe ori mai sus), dar sînt cu totul nepotrivite ca instrument de demonstrație sau pentru a deduce formule. O eroare directă constă în afirmația că un triunghi infinit de îngust poate fi desfășurat în plan, adică înlocuit printr-un triunghi plan cu laturi de aceeași lungime, cu aceleași unghiuri și cu aceeași arie ca ale celui sferic. În realitate, nici un

triunghi sferic (oricît de mic ar fi) nu poate fi desfășurat în plan în sensul considerat aici; aceasta se vede și din faptul că suma unghiurilor unui triunghi plan este totdeauna egală cu  $2d$ , în timp ce, la un triunghi sferic, ea este totdeauna mai mare decît  $2d$ . În exemplul nostru, în triunghiul sferic  $PAB$  (fig. 33 dreapta), unghiurile  $A$  și  $B$  sînt drepte; dacă un astfel de triunghi ar putea fi desfășurat în plan, s-ar obține un triunghi plan (isoscel) (fig. 33 stînga) cu unghiurile la bază drepte.



## TABLA DE MATERII

Prefață la prima ediție.....	3
Introducere .....	5
Capitolul I. <i>Erori de raționament, accesibile începătorului</i>	10
Capitolul II. <i>Analiza exemplelor tratate în capitolul I....</i>	22
Capitolul III. <i>Erori de raționament, legate de noțiunea de limită</i> .....	36
Capitolul IV. <i>Analiza exemplelor tratate în capitolul III</i>	51

Traducere : Katz Moise

---

Responsabil de carte : Neicov Valentină  
 Tehnoredactor : Horowitz Strul  
 Corector : Griseanu Silviu

---

*Dat la cules 26.11.957. Bun de tipar 13.01.58. Hirtie semi-velină de 65 g/m<sup>2</sup>. 91×86/15. Coli editoriale 3,48. Coli de tipar 3,75. Comanda 4015. A. 02182 ; E 13.768. Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari și mici 513.*

---

Tiparul executat sub com. nr. 1454 la Combinatul Poligrafic  
 Casa Științei „I. V. STALIN”, București — R.P.R.